Équations Différentielles Linéaires du 1er ordre

Exercice 1. Dans chacun des exemples suivants, trouver la solution générale de l'équation différentielle sur $\mathbf{R}$:

1. $y'(x) + 3\,y(x) = x + 1$;
2. $y' - 4y = (2x+3)e^x$;
3. $y' - 4y = e^x$;
4. $y' - 5y = \cos(4t)$;
5. $y' - 5y = \cos(4t) + \sin(2t)$;
6. $\dfrac{du}{dx} - u = e^x(x^2+1)$.

Exercice 2. 1. Trouver les solutions sur $]-1,+\infty[$ de

$$y'(x) + 2\frac{y(x)}{x+1} = \frac{e^{2x}}{x+1}.$$

2. Trouver les solutions sur $]0,+\infty[$ de

$$x\,y'(x) + (x+1)y(x) = \cos(x)e^{-x}.$$

Exercice 3. Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on définit l'équation différentielle suivante

$$(1+x)y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+x}. \qquad \text{(E)}$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la fonction f, solution de (E), passant par le point $(0,2)$.

Exercice 4. Dans chacun des exemples suivants, résoudre l'équation différentielle puis déterminer la solution vérifiant la condition donnée

$$\begin{array}{lll}
y'(x) - y(x) = -\dfrac{4e^{2x}}{(e^x+1)^2}, & \text{pour } x \in \mathbf{R}, & y(0) = 2, \\
y'(x) - y(x) = e^x - 2x, & \text{pour } x \in \mathbf{R}, & y(0) = 3, \\
xy'(x) - y(x) = \ln(x), & \text{pour } x \in]0,+\infty[, & y(1) = 1, \\
xy'(x) + y(x) = 2\sin(x), & \text{pour } x \in]0,+\infty[, & y(\pi) = 1,
\end{array}$$

Exercice 5. On effectue un traitement thermique sur une pièce d'assemblage d'une structure métallique. le traitement consiste à chauffer la pièce puis à la plonger dans un bain d'huile. On note $x(t)$ la température du bain d'huile à l'instant t et $y(t)$ celle de la pièce au même instant. Un bilan thermique permet d'établir les équations suivantes :

$$x'(t) = -0.01\,[x(t) - y(t)]\,, \qquad y'(t) = 0.02\,[x(t) - y(t)]\,,$$

les conditions initiales étant : $x(0) = 30°C$, $y(0) = 300°C$.

1. On pose $f(t) = x(t) - y(t)$. Vérifier que f est solution d'une équation différentielle et résoudre cette équation.

2. En déduire les expressions des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.