Équations Différentielles du 1er Ordre

Philippe Briand

https://www.lama.univ-savoie.fr/~briand/

DUT Génie Civil 1re année

IUT de Chambéry, 1er semestre 2017

Équa. diff. linéaires du 1er ordre à coeff. constants

Séance n° 1 du 07/02/2017

Généralités sur les équations différentielles

Équations différentielles linéaires du 1er ordre
- Équa. diff. linéaires du 1er ordre à coefficients constants
- Équa. diff. linéaires du 1er ordre : cas général

Objectifs de la séance

1. Comprendre ce qu'est une équation différentielle
2. Acquérir le vocabulaire associé
3. Résolution des équa. diff. linéaires du 1er ordre à coeff. constants

Équations Différentielles

Sommaire

Généralités sur les équations différentielles

Équations différentielles linéaires du 1er ordre
Équa. diff. linéaires du 1er ordre à coefficients constants
Équa. diff. linéaires du 1er ordre : cas général

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

- Une équation différentielle est :
  - une équation fonctionnelle : l'inconnue est une fonction notée traditionnellement y
  - faisant intervenir les dérivées de la fonction y
  - on résout cette équation sur un intervalle de $\mathbb{R}$
- Exemples :
  1. Trouver les fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) - 2\,y(x) = 3;$$
  2. Trouver les fonctions $y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant
  $$\forall x \geq 0, \qquad y(x)y'(x) = e^{-x}, \qquad y(0) = 1;$$
  3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
  $$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = \cos(3x + 2).$$

Résoudre une équation différentielle

- C'est trouver **l'ensemble** des fonctions solutions de cette équation
  - Par exemple, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
  $$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = \cos(3x + 2).$$
  c'est trouver toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables t.q.
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = \cos(3x + 2).$$
- Attention, la variable de la fonction — dans les exemples précédents x — est souvent omise
  - On écrit en général : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
  $$y'' - 2y' + 5y = \cos(3x + 2)$$
- Si l'équation différentielle décrit un phénomène physique évoluant dans le temps, la variable de la fonction y est notée t plutôt que x

Équations Différentielles

Sommaire

Généralités sur les équations différentielles

Équations différentielles linéaires du 1er ordre
Équa. diff. linéaires du 1er ordre à coefficients constants
Équa. diff. linéaires du 1er ordre : cas général

Équa. Diff. du 1er Ordre

Définition

Une équation différentielle du 1er ordre est une équation différentielle dans laquelle interviennent seulement : la fonction y, sa dérivée y' et la variable de la fonction x

- $y'(x) - 2xy(x) = 3$, $y(x)y'(x) = 3x^2$ sont du 1er ordre
- $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = \cos(3x + 2)$ n'est pas du 1er ordre mais du 2e

Notations : on considère dans la suite

- un intervalle I de $\mathbb{R}$; par exemple $I = \mathbb{R}$, $I = [0, +\infty[$, $I =]0, +\infty[$, ...
- deux fonctions $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur I ;
- un point x_0 appartenant à l'intervalle I.

Équa. Diff. Linéaire du 1er ordre

Définition

Une équation différentielle linéaire du 1er ordre est une équation différentielle du type

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - a(x)\, y(x) = f(x) \qquad \text{(L)}$$

Exemple(s)

1. L'équation différentielle $y'(x) - 3y(x) = 0$ correspond à $a \equiv 3$ et $f \equiv 0$; on prend $I = \mathbb{R}$
2. Dans l'exemple $y'(x) - x^2\, y(x) = \ln(x)$, $a(x) = x^2$ et $f(x) = \ln(x)$; on prend $I =]0, +\infty[$.

Équa. Diff. Linéaire du 1er ordre

Exemple(s)

Dans l'exemple $xy'(x) - y(x) = 2$, il faut réécrire l'équation :

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = \frac{2}{x}, \qquad a(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \frac{2}{x}$$

On résout sur $I_- =]-\infty, 0[$ puis sur $I_+ =]0, +\infty[$ car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle !

Définition

Une solution de (L) est une fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I, \qquad y'(x) - a(x)\, y(x) = f(x).$$

Résoudre ou intégrer l'équation (L) c'est trouver l'ensemble des fonctions qui sont solutions de (L).

Équations Différentielles

Sommaire

Généralités sur les équations différentielles

Équations différentielles linéaires du 1er ordre

Équa. diff. linéaires du 1er ordre à coefficients constants

Équa. diff. linéaires du 1er ordre : cas général

Définition

Définition

Il s'agit d'une équa. diff. du type

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - a\,y(x) = f(x) \qquad \text{(LC)}$$

- La fonction $a(x)$ est constante égale à a
- La fonction f n'est pas constante.

Remarque(s)

On résout une telle équa. diff. sur un intervalle I sur lequel f est continue

- $f(x) = \cos(x)$, $I = \mathbb{R}$
- $f(x) = \ln(x)$, $I =]0, +\infty[$

Définition

L'équation homogène — ou sans second membre — associée à (LC) est

$$y'(x) - a\,y(x) = 0.$$

Résolution de $y' - ay = 0$

Théorème

Les solutions de l'équation homogène $y'(x) - a\,y(x) = 0$ sont les fonctions

$$y(x) = C\,e^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}$$

- Pour toute valeur de la constante C, on obtient une solution
  - Il y a donc une infinité de solutions
- La solution générale de l'équation homogène désigne l'ensemble des solutions de cette équation ; on note $y_h(x) = C\,e^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.

Exemple(s)

1. $y'(x) - 2\,y(x) = 0$: $y_h(x) = C\,e^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$
2. $y'(x) = 0$: $y_h(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$
3. $y'(x) + 3\,y(x) = 0$: $y_h(x) = C\,e^{-3x}$, $C \in \mathbb{R}$
4. $2\,y'x) - y(x) = 0$: $y_h(x) = C\,e^{x/2}$, $C \in \mathbb{R}$

Solution générale de l'équation complète

Théorème

La solution générale de $y'(x) - a\,y(x) = f(x)$ est :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C\,e^{ax} + y_p(x), \quad C \in \mathbb{R},$$

avec

- y_h *solution générale de l'équation homogène*
- y_p *une solution particulière de l'équation complète c'est à dire une fonction vérifiant*

$$\forall x \in I, \quad y_p'(x) - a\,y_p(x) = f(x)$$

- Pour résoudre l'équation complète, il faut savoir comment trouver une solution particulière

Exemple : $y'(x) - 2y(x) = 3$

- La solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = C\, e^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

- On remarque que $y_p(x) = -3/2$ est solution de l'eq. complète
- La solution générale de l'équation complète est

$$y_g(x) = C\, e^{2x} - 3/2, \quad C \in \mathbb{R}$$

Solution particulière : cas particuliers

- $f(x) = k$
  - $a \neq 0$, $y_p(x) = -k/a$;
  - $a = 0$, $y_p(x) = k\, x$;
- $f(x) = P(x)$ où P polynôme de degré n
  - Si $a \neq 0$, on cherche une sol. part. du type $y_p(x) = Q(x)$ avec Q polynôme de degré $n = \deg P$;
  - $a = 0$, on cherche une sol. part. du type $y_p(x) = x\, Q(x)$ avec Q polynôme de degré $n = \deg P$;

  - $y'(x) - y(x) = 2x + 3$: y_p du type $y_p(x) = a_1 x + a_0$;
  - $y'(x) = 2x + 3$: y_p du type $y_p(x) = x\,(a_1 x + a_0) = a_1 x^2 + a_0 x$.
- $f(x) = \alpha \cos(\omega x + \varphi) + \beta \sin(\omega x + \varphi)$: y_p du type $y_p(x) = A \cos(\omega x + \varphi) + B \sin(\omega x + \varphi)$
  - $y'(x) - y(x) = 2 \sin(x + 3) - 4 \cos(x + 3)$; $\omega = 1$, $\varphi = 3$: y_p du type $y_p(x) = A \sin(x + 3) + B \cos(x + 3)$;
  - Si $f(x) = \alpha \cos(\omega x + \varphi)$, $y_p(x) = A \cos(\omega x + \varphi) + B \sin(\omega x + \varphi)$;
  - $y'(x) - y(x) = 2 \sin(x + 3)$: y_p du type $y_p(x) = A \sin(x + 3) + B \cos(x + 3)$.

Solution particulière : cas particuliers

- $f(x) = e^{sx} P(x)$ où P est un polynôme de degré n
  - $a \neq s$, $y_p(x) = e^{sx} Q(x)$ avec Q polynôme de degré $n = \deg P$;
  - $a = s$, $y_p(x) = e^{sx} xQ(x)$ avec Q polynôme de degré $n = \deg P$.
  - $y'(x) - y(x) = e^{-x}(2x+3)$: y_p du type
$$y_p(x) = e^{-x}(a_1 x + a_0).$$
  - $y'(x) + y(x) = e^{-x}(2x+3)$: y_p du type
$$y_p(x) = x(a_1 x + a_0) e^{-x} = \left(a_1 x^2 + a_0 x\right) e^{-x}.$$
- Si $f = f_1 + f_2$, $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$

Exemples

1. Résoudre l'équation différentielle
$$y'(x) + 2y(x) = 2x + 1$$

——— To be continued ———

2. Résoudre
$$y'(t) - 4y(t) = \cos(3t)$$
3. Résoudre
$$2y'(t) + 4y(t) = (t^2 + t + 1)e^{-t}$$
4. Résoudre
$$y'(x) + y(x) = (x+1)e^{-x}$$
5. Résoudre
$$y'(x) + y(x) = e^{-x}$$

Équa. diff. linéaires du 1er ordre

Séance n° 2 du 10/02/2017

Généralités sur les équations différentielles

Équations différentielles linéaires du 1er ordre
Équa. diff. linéaires du 1er ordre à coefficients constants
Équa. diff. linéaires du 1er ordre : cas général

Objectifs de la séance

1. Pratique des EDL1D à coeff. constants

Rappels

- La solution générale de l'équation $y'(x) - ay(x) = 0$ est

$$y_h(x) = C\, e^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}$$

- La solution générale de l'équation $y'(x) - ay(x) = f(x)$ est

$$y_g(x) = C\, e^{ax} + y_p(x), \quad C \in \mathbb{R}$$

  où y_p est une solution particulière de l'équation.
- $f(x) = k$
  - $a \neq 0$, $y_p(x) = -k/a$;
  - $a = 0$, $y_p(x) = k\,x$;
- $f(x) = P(x)$ où P polynôme de degré n
  - Si $a \neq 0$, on cherche une sol. part. du type $y_p(x) = Q(x)$ avec Q polynôme de degré $n = \deg P$;
  - $a = 0$, on cherche une sol. part. du type $y_p(x) = x\,Q(x)$ avec Q polynôme de degré $n = \deg P$;

Solution particulière : cas particuliers

- $f(x) = \alpha \cos(\omega x + \varphi) + \beta \sin(\omega x + \varphi)$: y_p du type $y_p(x) = A \cos(\omega x + \varphi) + B \sin(\omega x + \varphi)$
  - Attention si $f(x) = \alpha \cos(\omega x + \varphi)$, $y_p(x) = A \cos(\omega x + \varphi) + B \sin(\omega x + \varphi)$
- $f(x) = e^{sx}\, P(x)$ où P est un polynôme de degré n
  - $a \neq s$, $y_p(x) = e^{sx}\, Q(x)$ avec Q polynôme de degré $n = \deg P$;
  - $a = s$, $y_p(x) = e^{sx}\, xQ(x)$ avec Q polynôme de degré $n = \deg P$.
  - $y'(x) - y(x) = e^{-x}\,(2x+3)$: y_p du type

$$y_p(x) = e^{-x}\,(a_1 x + a_0)\,.$$

  - $y'(x) + y(x) = e^{-x}\,(2x+3)$: y_p du type

$$y_p(x) = x\,(a_1 x + a_0)\, e^{-x} = \left(a_1 x^2 + a_0 x\right) e^{-x}.$$

- Si $f = f_1 + f_2$, $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$

Exemples

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = 2x + 1$$

`To be continued`

2. Résoudre

$$y'(t) - 4y(t) = \cos(3t)$$

3. Résoudre Non traité en 2017

$$2y'(t) + 4y(t) = (t^2 + t + 1)e^{-t}$$

4. Résoudre

$$y'(x) + y(x) = (x + 1)e^{-x}$$

5. Résoudre

$$y'(x) + y(x) = e^{-x}$$

Équa. diff. linéaires du 1^{er} ordre

Séance n° 3 du 14/02/2017

Généralités sur les équations différentielles

Équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre
Équa. diff. linéaires du 1^{er} ordre à coefficients constants
Équa. diff. linéaires du 1^{er} ordre : cas général

Exercice 1 — Fiche 1

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$
$$y'(x) + 3\,y(x) = x + 1$$
2. Intégrer l'équation différentielle
$$y' - 4y = (2x+3)e^x$$
3. Intégrer l'équation différentielle
$$y' - 4y = e^x$$
4. Résoudre sur $\mathbb{R}$
$$y' - 5y = \cos(4t)$$
5. Idem pour Non traité en 2017
$$y' - 5y = \cos(4t) + \sin(2t)$$
6. Résoudre
$$\frac{du}{dx} - u = e^x(x^2+1)$$

Équa. diff. linéaires du 1^{er} ordre

Séance n° 4 du 14/02/2017

Généralités sur les équations différentielles

Équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre
Équa. diff. linéaires du 1^{er} ordre à coefficients constants
Équa. diff. linéaires du 1^{er} ordre : cas général

Objectifs de la séance

1. Équa. diff. linéaires du 1^{er} ordre homogènes
2. Méthode de la variation de la constante

Équations Différentielles

Sommaire

Généralités sur les équations différentielles

Équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre
Équa. diff. linéaires du 1^{er} ordre à coefficients constants
Équa. diff. linéaires du 1^{er} ordre : cas général

Équation homogène

- $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues
- On cherche les solutions de l'équa. diff. (L)

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - a(x)y(x) = f(x).$$

- On commence par l'équation sans second membre

Théorème

La solution générale de l'équation

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - a(x)y(x) = 0$$

est :

$$y_h(x) = C\, e^{A(x)}, \quad C \in \mathbb{R},$$

où A est une primitive de a sur I.

- Primitive : pour $x \in I$, $A'(x) = a(x)$

Exemples

1. Trouver les solutions sur $]-1, +\infty[$ de
$$y'(x) - \frac{y(x)}{x+1} = 0.$$
2. Trouver les solutions sur $]-1, +\infty[$ de
$$y'(x) + 2\frac{y(x)}{x+1} = 0.$$
3. Trouver les solutions sur $]0, +\infty[$ de
$$x\, y'(x) + (x+1)y(x) = 0.$$

Équation complète

Théorème

La solution générale de l'équation

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - a(x)y(x) = f(x)$$

est $y_g(x) = y_h(x) + y_p(x)$ *où*

1. y_h *est la solution générale de l'équation homogène associée*
2. y_p *est une solution particulière de l'équation*

- Si y_p est une solution particulière, la solution générale est

$$y_g(x) = C\, e^{A(x)} + y_p(x), \quad C \in \mathbb{R}, \qquad A \text{ primitive de } a$$

- Il faut donc savoir trouver des solutions particulières

Variation de la constante

- On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = u(x)\, e^{A(x)}$$

- y_p est solution particulière si et seulement si

$$u'(x)e^{A(x)} = f(x) \quad \text{c'est à dire} \quad u'(x) = f(x)e^{-A(x)}$$

- Il suffit de trouver une primitive $u(x)$ de $f(x)e^{-A(x)}$ pour obtenir une solution particulière

Théorème

Soient A *une primitive de* a *sur* I *et* u *une primitive de* $f(x)e^{-A(x)}$ *sur* I*. La solution générale de* $y'(x) - a(x)y(x) = f(x)$*, pour* $x \in I$*, est*

$$y_g(x) = (C + u(x))\, e^{A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemples

1. Trouver les solutions sur $]-1,+\infty[$ de

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x+1} = x+2.$$

2. Trouver les solutions sur $]-1,+\infty[$ de

$$y'(x) + 2\frac{y(x)}{x+1} = \frac{e^{2x}}{x+1}.$$

3. Trouver les solutions sur $]0,+\infty[$ de

$$x\,y'(x) + (x+1)y(x) = \cos(x)e^{-x}.$$

Problème de Cauchy

- Soient x_0 un point de I, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Théorème

L'équation différentielle

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - a(x)y(x) = f(x)$$

possède une unique solution vérifiant : $y(x_0) = y_0$.

- La condition $y(x_0) = y_0$ fixe la valeur de la constante C de la solution générale de l'équation

Exemples

1. Trouver la solution sur $]-1,+\infty[$ de
$$y'(x) - \frac{y(x)}{x+1} = x+2$$
vérifiant $y(0) = 3$.
2. Trouver la solution sur $]-1,+\infty[$ de
$$y'(x) + 2\frac{y(x)}{x+1} = \frac{e^{2x}}{x+1}$$
vérifiant $y(0) = 0$.
3. Trouver les solutions sur $]0,+\infty[$ de Non traité en 2017
$$x\,y'(x) + (x+1)y(x) = \cos(x)e^{-x}$$
vérifiant $\lim_{x\to 0} y(x) = 1$. Idem pour $\lim_{x\to 0} y(x) = 2$.

Équa. diff. linéaires du 1^{er} ordre

Séance n° 5 du 27/02/2017

Généralités sur les équations différentielles

Équations différentielles linéaires du 1er ordre
Équa. diff. linéaires du 1er ordre à coefficients constants
Équa. diff. linéaires du 1er ordre : cas général

Séance de TD

1. Fiche 1 — Exercice 3
2. Fiche 1 — Exercice 4 — Questions 1 et 3

Équa. diff. linéaires du 1er ordre

Séance n° 6 du 28/02/2017

Généralités sur les équations différentielles

Équations différentielles linéaires du 1er ordre
Équa. diff. linéaires du 1er ordre à coefficients constants
Équa. diff. linéaires du 1er ordre : cas général

Séance de TD

- Fiche 1 : Exercice 4 — Question 4 + Exercice 5