Équations Différentielles Linéaires du 2e ordre

Exercice 1. Dans chacun des exemples suivants, trouver la solution générale de l'équation différentielle sur $\mathbf{R}$:

1. $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 3$;
2. $4y''(x) - 12y'(x) + 9y(x) = 4e^{-2x}$;
3. $y''(x) - 3y'(x) = 2x + 1$;
4. $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = e^x(3x + 2)$;
5. $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = xe^{-2x}$;
6. $2y''(x)+2y'(x)+y(x) = \cos(3x)-2\sin(3x)$.

Exercice 2. Dans chacun des exemples suivants, résoudre l'équation différentielle puis déterminer la solution vérifiant les conditions initiales :

$$\begin{aligned}
&y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x + 4, && y(0) = 2, \quad y'(0) = 0,\\
&y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = -2x^2 + 9, && y(0) = 5, \quad y'(0) = -3,\\
&y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 2\sin(3x), && y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 3. Dans un circuit RLC, la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur est solution de l'équation différentielle

$$LC\, u''(t) + RC\, u'(t) + u(t) = E,$$

où E est la tension continue délivrée par le générateur. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur ; on considère les conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$.

Déterminer la tension aux bornes du condensateur ; on prendra $LC = 20$, $RC = 4$ et $E = 50$.

Exercice 4. Dans un système masse-ressort cf. Fig. 1, l'allongement $x(t)$ du ressort est solution de l'équation différentielle

$$m\, x''(t) + c\, x'(t) + k\, x(t) = m\, g + f_{\text{ext}}(t),$$

où m est la masse, k la constante de raideur, c une constante représentant l'amortissement et f_{ext} la force extérieure. À l'instant $t = 0$, l'allongement du ressort est $x(0) = x_0$ et $x'(0) = 0$.

On réécrit cette équation sous la forme

$$x''(t) + 2\xi\omega_0\, x'(t) + \omega_0^2\, x(t) = g + f(t), \quad f(t) = f_{\text{ext}}(t)/m,$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre et $\xi = \frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{mk}}$ le coefficient d'amortissement.

1. On suppose dans cette question que la force extérieure est nulle.

(a) Déterminer l'allongement du ressort en fonction du temps. On distinguera les différents cas $\xi = 0$, $0 < \xi < 1$, $\xi = 1$ et $\xi > 1$.

(b) Que se passe-t-il lorsque $x_0 = mg/k$? Est-ce normal ?

2. Dans cette question, on suppose que $\xi = 0$ pour simplifier. En $t = 0$, le système est à l'équilibre $x_0 = g/\omega_0^2$ et $x'(0) = 0$. On exerce une traction sinusoïdale sur le resort : $f(t) = \sin(\omega t)$.

(a) Déterminer l'allongement du ressort lorsque $\omega \neq \omega_0$?

(b) Que se passe-t-il si $\omega = \omega_0$?

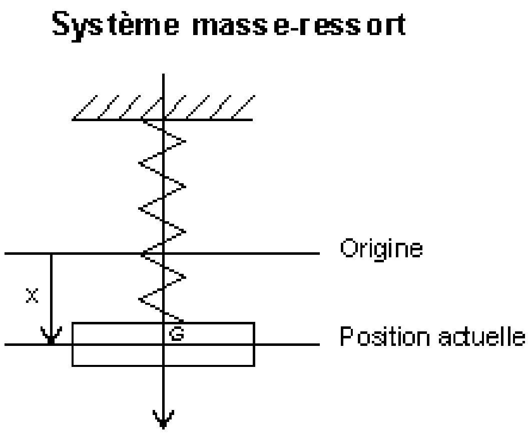

Figure 1 – Système masse ressort