Équations différentielles linéaires du 2^{e} ordre à coefficients constants

Philippe Briand

https://www.lama.univ-savoie.fr/~briand/

DUT Génie Civil 1re année

IUT de Chambéry, 1er semestre 2017

Éq. diff. linéaires du 2^{e} ordre

Sommaire

Résolution de l'équation différentielle

$$\forall x \in I, \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x), \tag{2D}$$

où f est une fonction continue sur I et a, b, c sont trois réels avec $a \neq 0$.

- Dans la plupart des cas $I = \mathbb{R}$;
- L'équation homogène associée est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0. \tag{H}$$

Théorème

La solution générale de (2D) *est :*

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

où y_h est la sol. générale de l'éq. (H) *et y_p une sol. particulière de* (2D).

Éq. diff. linéaires du 2e ordre

Sommaire

Résolution de l'équation homogène

- Il s'agit de l'équation
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0. \tag{H}$$
- Tout se ramène à la résolution d'une éq. du 2e degré.
- On appelle polynôme caractéristique de (H) le polynôme
$$C(r) = a\,r^2 + b\,r + c. \tag{PC}$$
- On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Rappelons que
  1. si $\Delta > 0$, C possède deux racines réelles distinctes :
  $$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \;;$$
  2. si $\Delta = 0$, C possède une racine double $r = -\dfrac{b}{2a}$;
  3. si $\Delta < 0$, C possède deux racines complexes conjuguées
  $$r_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha + i\beta, \qquad r_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha - i\beta.$$

Résolution de l'équation homogène

Théorème

La solution générale de l'équation homogène est :

1. *si $\Delta > 0$, notant r_1 et r_2 les racines de C :*
$$y_h(x) = C_1\,e^{r_1 x} + C_2\,e^{r_2 x}, \quad C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R} \;;$$
2. *si $\Delta = 0$, notant r la racine double de C :*
$$y_h(x) = (C_1 x + C_2)\,e^{rx}, \quad C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R} \;;$$
3. *si $\Delta < 0$, notant $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ les deux racines de C :*
$$y_h(x) = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right), \quad C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemples

Donner la solution générales des équations

1. $y'' - y' - 6y = 0$;
2. $4y'' - 4y' + y = 0$;
3. $y'' + y' + y = 0$.

Remarque(s)

1. La solution générale de l'éq. $y'' - \omega^2 y = 0$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C_1\, e^{\omega x} + C_2\, e^{-\omega x}, \quad C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}, \\ &= k_1\, \cosh(\omega x) + k_2\, \sinh(\omega x), \quad k_1 \in \mathbb{R},\ k_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. On peut réécrire

$$C_1\, \cos(\beta x) + C_2\, \sin(\beta x) = k_1 \cos(\beta x + k_2) = d_1 \sin\left(\beta x + d_2\right),$$

$k_1 = d_1$, $d_2 = k_2 + \frac{\pi}{2}$.

Éq. diff. linéaires du 2^{e} ordre

Sommaire

Solutions particulières : cas particuliers

Lorsque $f(x) = e^{sx} P(x)$, P polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$

on recherche une solution particulière sous la forme :

1. $y_p(x) = e^{sx} Q(x)$, $\deg Q = \deg P$ si s n'est pas racine de C soit $C(s) \neq 0$;
2. $y_p(x) = e^{sx} x Q(x)$, $\deg Q = \deg P$ si s est racine simple de C soit $C(s) = 0$ et $C'(s) \neq 0$;
3. $y_p(x) = e^{sx} x^2 Q(x)$, $\deg Q = \deg P$ si s est racine double de C soit $C(s) = 0$ et $C'(s) = 0$.

Remarque(s)

Ce formalisme englobe les cas suivants :

- $f(x) = P(x)$, P polynôme de degré n : $s = 0$.
- $f(x) = e^{sx}$: $\deg P = 0$.

Solutions particulières : cas particuliers

Lorsque $f(x) = e^{sx} [k_1 \cos(\omega x) + k_2 \sin(\omega x)]$,

on recherche une solution particulière sous la forme :

1. $y_p(x) = e^{sx} [A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)]$, si $s + i\omega$ n'est pas racine de C soit $C(s + i\omega) \neq 0$;
2. $y_p(x) = x\, e^{sx} [A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)]$, si $s + i\omega$ est racine de C soit $C(s + i\omega) = 0$.

Remarque(s)

- Il s'agit en fait du même résultat que précédemment.
- Si $f = f_1 + f_2$, $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$.

Exemples

Donner la solution générale des équations différentielles

1. $y'' - y' - 6y = e^{2x}$;
2. $y'' - y' - 6y = e^{3x}$;
3. $4y'' - 4y' + y = 2xe^{x}$;
4. $y'' + y' + y = \cos(x)$;
5. $y'' + 4y = 3\sin(2x)$.

Problème de Cauchy

- f est une fonction continue sur l'intervalle I ;
- Soient x_0 un point de I, y_0 et z_0 deux réels.

Théorème

L'équation différentielle

$$\forall x \in I, \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

possède une unique solution vérifiant :

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = z_0.$$

- Il s'agit simplement de fixer la valeur des constantes qui apparaissent dans la solution de l'équation homogène.