# Extrema locaux des fonctions de 2 variables

**Exercice 1.** Calculer les dérivées partielles 1res et 2es des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^4\right)$ ; 2. $f(x,y,z) = \sin\left(xy^2z^3\right)$ ; 3. $f(x,y) = e^{x^2+3y}$.

**Exercice 2.** Nature des points critiques des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^2+xy+y^2$ ;
2. $f(x,y) = x^4-y^2$ ;
3. $f(x,y) = x^3+3x^2y-15x-12y$ ;
4. $f(x,y) = 1+x+y+x^2-xy+y^2$ ;
5. $f(x,y) = x^3+y^3+3xy$ ;
6. $f(x,y) = e^{xy}\left(xy-1\right)+y\left(y-4\right)$.

**Exercice 3.** Un entreprise fabrique le produit TRUC à l'aide des matières premières $M_1$ et $M_2$. Avec $x$ tonnes de $M_1$ et $y$ tonnes de $M_2$, cette entreprise produit

$$T(x,y) = 20x - x^2 + 16y - y^2 + 300$$

tonnes de TRUC.

Le produit TRUC est vendu 10 euros le kilogramme et l'entreprise achète les matières premières $M_1$ et $M_2$ respectivement 40 et 60 euros le kilogramme.

1. Expliciter la fonction $f(x,y)$ représentant le bénéfice réalisé par l'entreprise.
2. Pour quelles quantités de matières premières, ce bénéfice est-il optimal ?

**Exercice 4.** Une entreprise de génie civil fabrique des plots parallélépipédiques en béton destinés à être posés au sol et dont les faces exposées à l'air sont soumises à une forme de corrosion. On note, l'unité étant le mètre, $x$ la longueur, $y$ la largeur et $z$ la hauteur des plots.

1. Déterminer la surface $S(x,y,z)$ exposée à l'air.
2. L'entreprise souhaite faire des plots d'un poids donné correspondant à un volume de 1 $m^3$.
   (a) Exprimez la hauteur $z$ en fonction de $x$ et $y$.
   (b) Comment doit-on choisir $x$ et $y$ pour limiter l'effet de la corrosion ?
3. L'entreprise change de stratégie. Elle limite la surface exposée à l'air à 5 $m^2$.
   (a) Exprimez la hauteur $z$ en fonction de $x$ et $y$.
   (b) Comment doit-on choisir $x$ et $y$ pour maximiser le poids du bloc ?

**Exercice 5.** Un électricien souhaite placer un luminaire dans une pièce de forme triangulaire dont les sommets sont $(0,0)$, $(0,1)$ et $(2,0)$. Il souhaite placer le luminaire au point de coordonnées $(x,y)$ de sorte à minimiser la somme des carrés des distances du luminaire aux parois de la pièce.

1. Expliciter la quantité $f(x,y)$ que cherche à minimiser l'électricien.
2. Étudier la nature des points critiques éventuels de $f$ et conclure.