Fonctions de plusieurs variables

Philippe Briand

https://www.lama.univ-savoie.fr/~briand/

DUT Génie Civil 1re année

IUT de Chambéry, 1er semestre 2017

Fonctions de deux variables

Fonctions de deux variables

Sommaire

Définition

- Une fonction de 2 variables réelles est une application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x, y) \longrightarrow f(x, y).$$

- Exemples :
  - $f(x, y) = x^2 + y^2$;
  - $f(x, y) = \ln(x - 3y^2) - x$;
  - $f(x, y, z) = ye^{x-z}$
- Le *domaine de définition*, noté D_f, est l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $f(x, y)$ existe.
- Exemples :
  - $f(x, y) = x^2 - y$: $D_f = \mathbb{R}^2$
  - $f(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$: D_f est le plan privé de la première bissectrice
  - $f(x, y) = \ln(x - 3y^2) - x$: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 3y^2\}$

Exemple : $f(x,y) = \ln(x - 3y^2) - x$

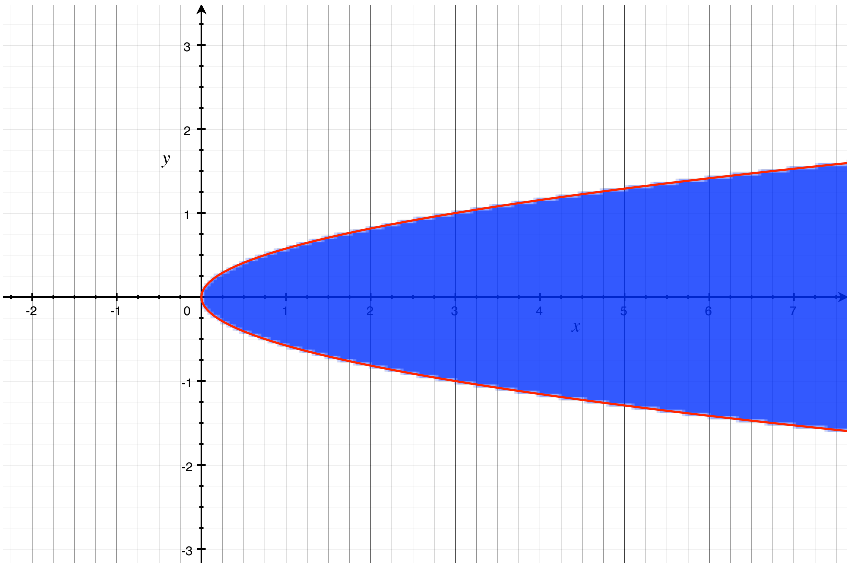


FIGURE – Domaine de définition de $f(x,y) = \ln(x - 3y^2) - x$

Représentation graphique

- L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- Lorsque (x,y) décrit D_f, le point de l'espace M de coordonnées $(x, y, f(x,y))$ décrit la surface S_f d'équation $z = f(x,y)$
- C'est la représentation graphique de f

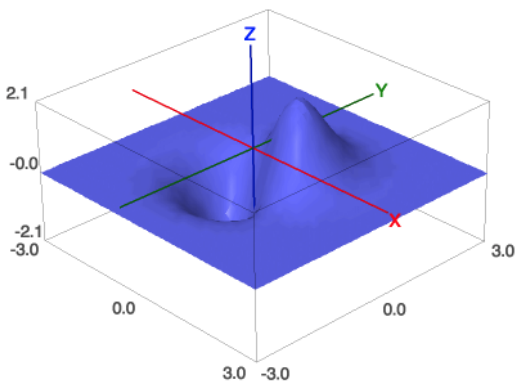


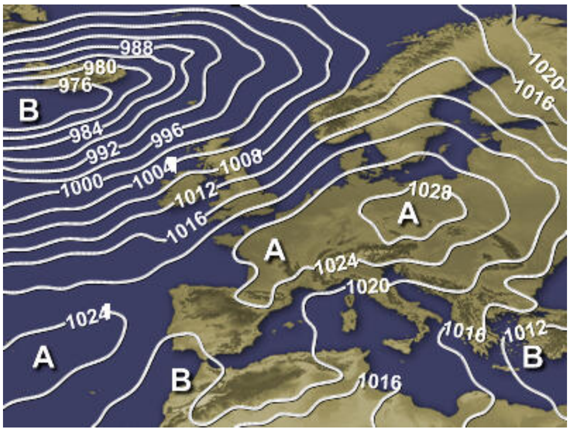
FIGURE – $f(x,y) = (3x + 4y)e^{-x^2-y^2}$

Lignes de niveau

- f fonction de 2 variables ; c un réel
- On appelle *ligne de niveau c de f* la courbe suivante

$$L_f(c) = \{(x, y) \in D_f : f(x, y) = c\}$$

- Isobares :



Exemple

- $f(x, y) = \dfrac{4}{x^2 + y^2 + 2}$
- On a $0 < f(x, y) \leq 2$ donc $L_f(c) = \emptyset$ si $c \leq 0$ et $c > 2$.
- Pour $0 < c \leq 2$, les lignes de niveau sont des cercles

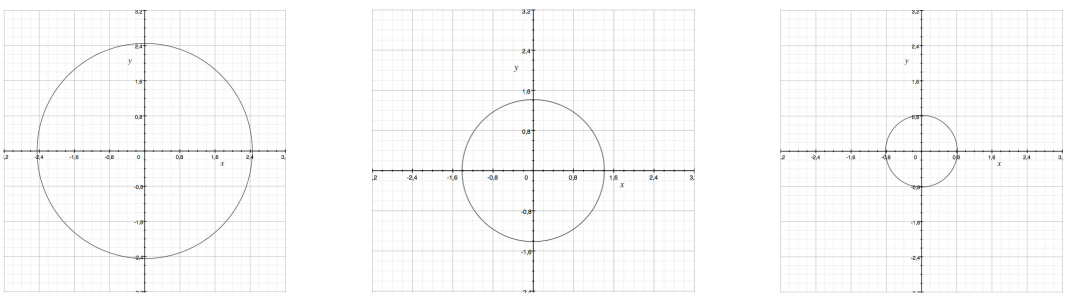


FIGURE – Lignes de niveau pour $c = 1/2$, $c = 1$, $c = 3/2$

Fonctions de deux variables

Sommaire

Définition

- f définie sur l'ouvert $U \subset D_f$, $(x_0, y_0) \in U$

Définition

La dérivée partielle de f par rapport à x au point (x_0, y_0), notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, est la limite, lorsqu'elle existe, suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

La dérivée partielle de f par rapport à y au point (x_0, y_0), notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, est la limite, lorsqu'elle existe, suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

- Quand on calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, x bouge autour de x_0 mais y est fixé à y_0

En pratique

- Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, on dérive la fonction $f(x,y)$ par rapport à x en considérant que y est une constante
- Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, on dérive la fonction $f(x,y)$ par rapport à y en considérant que x est une constante
- Toutes les règles de dérivation que vous connaissez demeurent valables
- Exemples :
  - $f(x,y) = x^2 + y^3$;
  - $f(x,y) = \sin\left(x^2y^3\right)$;
  - $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 - 2y^4}$;
- Vocabulaire : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont continues sur U.

Dérivées d'ordre supérieur

- On peut itérer la construction :
  1. En calculant les dérivées partielles, on obtient les deux fonctions $(x,y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
  2. On peut calculer les dérivées partielles de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ par rapport à x et à y
- On obtient les *dérivées partielles secondes* ou *dérivées partielles d'ordre 2* :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$$

- Exemple : $f(x,y) = 4x^5 - 2x^3y^4 + 6y^2$

Théorème de Schwarz

- Vocabulaire : f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U si les dérivées partielles secondes de f sont continues sur U.

Théorème (Schwarz)

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, alors

$$\forall (x,y) \in U, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

- Exemple : $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^4\right)$.
- On peut considérer des fonctions de plus de 2 variables :

$$f(x,y,z) = \sin\left(xy^2z^3\right).$$

- Un autre exemple : $f(x,y) = e^{x^2+3y}$.

Fonctions de deux variables

Sommaire

Cas des fonctions d'une variable

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$; x_0 un réel
- Comment savoir si f possède au point x_0 un extremum local ?
- Sans faire le tableau de variation de f !
- Peut on dire si c'est un maximum ou un minimum local ?

La réponse est globalement OUI

1. On vérifie si x_0 est un point critique i.e. $f'(x_0) = 0$
2. On calcule $f''(x_0)$:
   - Si $f''(x_0) > 0$, minimum local (pensez à x^2) ;
   - Si $f''(x_0) < 0$, maximum local (pensez à $-x^2$) ;
   - Si $f''(x_0) = 0$, on ne peut rien dire ! Voir $f(x) = x^3$ et $f(x) = x^4$.

Fonctions de deux variables

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$;
- $p_0 = (x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$ (ou du domaine de définition de f).
- Le *gradient* de f au point (x_0, y_0) est le vecteur de $\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

- On dit que le point (x_0, y_0) est un point critique de f si

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \textbf{ET} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

- On appelle *matrice hessienne* de f au point (x_0, y_0) la matrice

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Extrema locaux des fonctions de deux variables

- Notation :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Théorème

Soit (x_0, y_0) un point critique de f c'est à dire tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \textbf{\textit{ET}} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Alors,

1. *Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f possède au point (x_0, y_0) un minimum local*
2. *Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f possède au point (x_0, y_0) un maximum local*
3. *Si $rt - s^2 < 0$, pas d'extremum local : le point (x_0, y_0) est un point selle ou col*
4. *Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire.*

Exemples

- Deux étapes pour rechercher les extrema locaux :
  1. On cherche les points critiques de f
  2. On applique le critère précédent.
- Nature des points critiques des fonctions suivantes :
  1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$;
  2. $f(x, y) = x^4 - y^2$;
  3. $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y - 15x - 12y$.