Calculs d'Incertitudes

Philippe Briand

https://www.lama.univ-savoie.fr/~briand/

DUT Génie Civil 1re année

IUT de Chambéry, 1er semestre 2017

Calcul d'incertitudes

Séance n° 16 du 11 avril 2017

Objectifs de la séance

1. Notion d'incertitude de mesure
2. Cas des fonctions d'une variable
3. Cas des fonctions de plusieurs variables

Notion d'incertitude

- On effectue la mesure d'une grandeur G
- Il y a toujours une **incertitude absolue** liée à cette mesure : $\Delta G > 0$
- La **vraie valeur** est comprise dans l'intervalle : $[G - \Delta G, G + \Delta G]$
- Le résultat est souvent noté $G \pm \Delta G$
- L'incertitude relative est $\dfrac{\Delta G}{|G|}$
- Les appareils de mesure indiquent l'incertitude absolue ou la précision

Le problème

- G grandeur dépendant d'une ou plusieurs autres grandeurs

$$G = f(x), \qquad G = f(x_1, \ldots, x_n)$$

  - Surface d'un disque : $G = \pi r^2$ (mesure du rayon)
  - Surface d'une plaque : $G = L \times l$ (mesure de la longueur et de la largeur)
- On connait les incertitudes absolues Δx ou Δx_1, ..., Δx_n
- Quelle est l'incertitude absolue ΔG commise sur G ?

Fonction d'une seule variable

- Les grandeurs G et x sont reliées via la formule $G = f(x)$
- On mesure x_0 pour la grandeur x avec incertitude absolue Δx

Théorème

L'incertitude absolue ΔG est donnée par

$$\Delta G = |f'(x_0)| \; \Delta x.$$

- Le résultat est valable lorsque $\dfrac{\Delta x}{x_0}$ est petit : Δx « petit » devant x_0
- Formule de Taylor à l'ordre 1 :

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x + \text{Reste},$$
$$\Delta G = |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| \simeq |f'(x_0)| \; \Delta x$$

- On effectue la mesure du rayon d'un disque : $r = 2 \pm 0,1m$. Quelle est l'incertitude absolue commise sur la surface du disque ? L'incertitude relative ?

Conventions d'écriture

Les conventions suivantes sont souvent utilisées

1. On ne conserve qu'un seul chiffre non nul pour ΔG
2. On garde la même précision pour G
3. On fait le calcul de l'incertitude relative avec toutes les décimales connues et on garde deux chiffres significatifs

Exemples

- Si $G = 18,131$ et $\Delta G = 0,0345$ on écrit

$$\Delta G = 0,03, \quad G = 18,13, \quad \frac{\Delta G}{G} = \frac{0,0345}{18,131} \simeq 0,0019028 \simeq 0,19\%$$

- Si $G = 2515,872$ et $\Delta G = 13,4678$ on écrit

$$\Delta G = 10, \quad G = 2520, \quad \frac{\Delta G}{G} = \frac{13,4678}{2515,872} \simeq 0,0053531 \simeq 0,54\%$$

Fonctions de plusieurs variables

- La grandeur G est donnée par $G = f(x_1, \ldots, x_n)$
- On mesure $a_1, \ldots, a_n$ pour les grandeurs $x_1, \ldots x_n$ avec incertitudes absolues $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$

Théorème

L'incertitude absolue ΔG est donnée par

$$\Delta G = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) \right| \Delta x_1 + \ldots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n) \right| \Delta x_n.$$

- Dans le cas $G = f(x, y)$, si on mesure $x_0 \pm \Delta x$ pour x et $y_0 \pm \Delta y$ pour y

$$\Delta G = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| \Delta y.$$

- Dans le cas $G = f(x, y, z)$, si on mesure $x_0 \pm \Delta x$ pour x, $y_0 \pm \Delta y$ pour y et $z_0 \pm \Delta z$ pour z

$$\Delta G = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right| \Delta z.$$

Exemples

1. On mesure la longueur L et la largeur l d'une plaque et on obtient

$$L = 11,3 \pm 0,15\, m, \qquad l = 5,53 \pm 0,07\, m.$$

   Calculez et préciser les incertitudes absolues et relatives du périmètre P et de la surface S de la plaque
2. On prend cette fois les mesures d'une salle de cours ; on obtient

$$L = 11,3 \pm 0,15\, m, \qquad l = 5,53 \pm 0,07\, m, \qquad h = 3,08 \pm 0,04\, m$$

   Calculez le volume V de la salle et précisez l'incertitude absolue et relative.