TP2 : Le ressort

Allumez l'ordinateur si nécessaire, connectez-vous puis lancez `Scilab`.

Résolution des équations différentielles du 2e ordre

Pour résoudre avec `Scilab`, sur l'intervalle $[0, t_{\max}]$, l'équation différentielle du 2e ordre

$$x''(t) + b(t)\,x'(t) + c(t)\,x(t) = f(t), \qquad x(0) = x_0, \quad x'(0) = y_0$$

l'idée est de se ramener à une équation différentielle du 1er ordre en posant $y(t) = x'(t)$. L'équation précédente se réécrit

$$x''(t) = -b(t)\,x'(t) - c(t)\,x(t) + f(t), \quad \text{c'est à dire} \quad y'(t) = -b(t)\,y(t) - c(t)\,x(t) + f(t).$$

On obtient alors le système différentiel du 1er ordre suivant pour $(x(t), y(t))$:

$$x'(t) = y(t), \quad y'(t) = -b(t)\,y(t) - c(t)\,x(t) + f(t), \qquad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Vous avez appris à résoudre de tels systèmes lors de la première séance.
Commençons par l'équation différentielle sur $[0, 10]$

$$x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = 0, \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Utilisez la méthode précédente pour résoudre avec `Scilab` cette équation différentielle et tracez le graphe des fonctions x et x'. Comparez avec la solution exacte : $x(t) = e^{-t}\,(\cos(2t) + \sin(2t)/2)$. Il est plus simple de créer un fichier `tp2_ex1.sce`.
Refaire l'exercice pour les équations différentielles

$$\begin{aligned} x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0, &\qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0,\\ x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 0, &\qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \end{aligned}$$

dont les solutions exactes sont respectivement $x(t) = e^{-t}(t+1)$ et $x(t) = (2e^{-3t} + 3e^{2t})/5$.

Le ressort

Dans un système masse-ressort cf. Fig. 1, l'allongement $x(t)$ du ressort est solution de l'équation différentielle

$$m\,x''(t) + c\,x'(t) + k\,x(t) = m\,g + f_{\text{ext}}(t),$$

où m est la masse, k la constante de raideur, c une constante représentant l'amortissement et f_{ext} la force extérieure. À l'instant $t = 0$, l'allongement du ressort est $x(0) = x_0$ et $x'(0) = 0$.
On réécrit cette équation sous la forme

$$x''(t) + 2\xi\omega_0\,x'(t) + \omega_0^2\,x(t) = g + f(t), \quad f(t) = f_{\text{ext}}(t)/m,$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre et $\xi = \frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{mk}}$ le coefficient d'amortissement.
On prendra dans toute la suite pour simplifier $\omega_0 = 1$, $g = 10$ et $f(t) = \sin(\omega t)$. Créer un programme `Scilab` (`tp2_ex4.sce`) permettant de tracer en fonction du temps l'allongement du ressort $x(t)$.

Force extérieure nulle. On suppose dans cette question que la force extérieure est nulle c'est à dire $f(t) = 0$ ($\omega = 0$). Testez les cas suivants : $\xi = 0$, $\xi = 0.1$, $\xi = 1$ et $\xi = 2$. On pourra prendre $x(0) = 12$ et $t_{\max} = 100$.
Que se passe-t-il lorsque $x_0 = g/\omega_0^2$? Est-ce normal ?
Modifiez le programme pour qu'il trace dans une nouvelle fenêtre la courbe paramétrée $(x(t), x'(t))$: testez les cas $\xi = 0$, $\xi = 0.1$, $\xi = 1$ et $\xi = 2$.

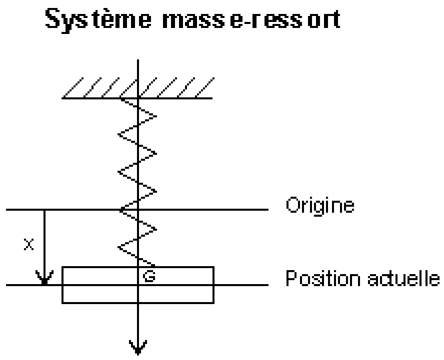

FIGURE 1 – Système masse ressort

Force extérieure. Nous allons reproduire l'expérience de « l'explosion du ressort » vue en cours. On part de la position d'équilibre : $x(0) = g/\omega_0^2$, $x'(0) = 0$.

On commence par le cas $\xi = 0$. Tracer la fonction $x(t)$ lorsque $\omega = 2\omega_0$. Que se passe-t-il ? Le ressort va-t-il sortir de la poulie ?

Prenez maintenant $\omega = \omega_0$. Qu'observez-vous pour $x(t)$? Le ressort va-t-il sortir de la poulie ?

Refaire l'expérience dans le cas plus réaliste où $\xi = 0.01$.

L'oscillateur de van der Pol

L'oscillateur de van der Pol a été imaginé par le physicien néerlandais Balthasar van der Pol alors qu'il était employé par les laboratoires Philips. Van der Pol découvrit que ce circuit contenant un tube à vide développait des oscillations stables, qu'il appela « oscillation de relaxation » et que l'on désigne aujourd'hui plutôt comme des cycles limites des circuits électriques.

L'équation est

$$x''(t) - \varepsilon\omega_0 \left(1 - x(t)^2\right) x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \qquad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0.$$

On prendra à nouveau $\omega_0 = 1$.

Créer un programme `Scilab` (`tp2_ex5.sce`) permettant de tracer en fonction du temps les fonctions $x(t)$ et $x'(t)$ ainsi que la courbe paramétrée $(x(t), x'(t))$. On pourra prendre pour commencer $\varepsilon = 1$, $x_0 = 1$ et $t_{\max} = 50$ puis faire varier x_0 et ε.

Le pendule

On considère un pendule composé d'une tige de masse négligeable et de longueur $l > 0$ à l'extrémité de laquelle est placée une masse m. On note θ l'angle de la tige avec la verticale. Le bilan des forces conduit à l'équation

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin(\theta(t)), \quad t \geq 0.$$

On prendra dans la suite $g = 9.81$, $l = 1$, $\theta'(0) = 0$ et on fera varier $\theta(0) = \theta_0$.

Créer un programme `Scilab` (`tp2_ex6.sce`) permettant de tracer en fonction du temps la fonction $\theta(t)$. Modifier le programme pour tracer également la solution de

$$\varphi''(t) = -\frac{g}{l}\,\varphi(t), \quad t \geq 0, \qquad \varphi(0) = \theta_0, \quad \varphi'(0) = 0.$$

Commencer par $\theta_0 = \pi/2$, puis $\theta_0 = \pi/3$, $\pi/4$, $\pi/5$ ... Qu'observez-vous ?

Modifier le programme pour qu'il prenne en compte les frottements :

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin(\theta(t)) - \lambda\theta'(t), \quad t \geq 0.$$

Partir de $\lambda = 0.1$ puis augmenter λ.