MATH2 : Correction rapide du CC1 du 23 mars 2015.

Exercice 1. 1. (a) La solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = Ce^{3x}, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Le second membre de l'équation (E) est de la forme $e^{sx}P(x)$ où $s = 2 \neq 3$ et $\deg P = 1$: on cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p(x) = e^{sx}Q(x)$ avec $\deg Q = 1$ c'est à dire sous la forme $y_p(x) = (ax+b)e^{2x}$. On a alors $y_p'(x) = ae^{2x} + 2(ax+b)e^{2x}$ et

$$y_p'(x) - 3y_p(x) = ae^{2x} + 2(ax+b)e^{2x} - 3(ax+b)e^{2x} = ae^{2x} - (ax+b)e^{2x} = (-ax+a-b)e^{2x} \ ;$$

La fonction y_p est solution si et seulement si $-a = 2$ et $a - b = 1$ c'est à dire $a = -2$ et $b = -3$:

$$y_p(x) = -(2x+3)e^{2x}.$$

La solution générale de (E) est

$$y_g(x) = Ce^{3x} - (2x+3)e^{2x}, \quad C \in \mathbf{R}.$$

(b) Puisque f est solution de (E), on a $f(x) = Ce^{3x} - (2x+3)e^{2x}$. Par conséquent, $f(0) = C - 3$ d'où l'on déduit que $C - 3 = 1$ et finalement $C = 4$:

$$f(x) = 4e^{3x} - (2x+3)e^{2x}.$$

2. Sur $]0, +\infty[$, l'équation est équivalente à

$$\forall x > 0, \qquad y'(x) - \frac{1}{x}\, y(x) = 1.$$

Une primitive de $x \longmapsto 1/x$ sur $]0, +\infty[$ est $x \longmapsto \ln x$. Par suite, la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = C\, e^{\ln x} = C\, x, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = u(x)\, x$. On a $y_p'(x) = u'(x)x + u(x)$ et

$$y_p'(x) - \frac{1}{x} y_p(x) = u'(x)x + u(x) - u(x) = xu'(x).$$

y_p est solution si et seulement si $xu'(x) = 1$ c'est à dire $u'(x) = 1/x$. On prend $u(x) = \ln x$ pour obtenir

$$y_p(x) = x\, \ln x.$$

La solution générale est

$$y_g(x) = Cx + x \ln x, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Exercice 2. 1. (a) Le polynôme caractéristique est $C(r) = r^2 - 2r - 3$ dont le discriminant est $\Delta = 16$; les racines de C sont $r_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ et $r_2 = \frac{2+4}{2} = 3$. La solution générale de l'équation homogène est :

$$y_h(x) = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{3x}, \quad C_1 \in \mathbf{R},\, C_1 \in \mathbf{R}.$$

Le second membre de l'équation (F) est du type $e^{sx}P(x)$ où $s = 0$ et $\deg P = 1$; comme 0 n'est pas racine de C, on cherche une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = a\, x + b$. On a $y_p'(x) = a$ et $y_p''(x) = 0$. Par conséquent,

$$y_p''(x) - 2y_p'(x) - 3y_p(x) = -2a - 3(ax+b) = -3ax - 2a - 3b \ ;$$

y_p est solution de (F) si et seulement si $-3a = 3$ et $-2a - 3b = -1$. On obtient $a = -1$ puis $b = 1$ et finalement
$$y_p(x) = -x + 1.$$
La solution générale de (F) est
$$y_g(x) = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{3x} - x + 1, \quad C_1 \in \mathbf{R},\ C_1 \in \mathbf{R}.$$
(b) Puisque f est solution de (F), elle est du type $f(x) = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{3x} - x + 1$ où C_1 et C_2 sont deux réels. On a $f(0) = C_1 + C_2 + 1$; d'autre part, $f'(x) = -C_1\, e^{-x} + 3C_2\, e^{3x} - 1$ et $f'(0) = -C_1 + 3C_2 - 1$. Par suite, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 4$ équivaut à $C_1 + C_2 = -1$ et $-C_1 + 3C_2 = 5$. En additionnant ces deux équations, on obtient $4C_2 = 4$ soit $C_2 = 1$ puis $C_1 = -2$. Finalement,
$$f(x) = -2\, e^{-x} + e^{3x} - x + 1.$$
2. Le polynôme caractéristique est $C(r) = r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2$; il possède une racine double $r = -1$: la solution générale de l'équation homogène est
$$y_h(x) = (C_1 x + C_2)e^{-x}, \quad C_1 \in \mathbf{R},\ C_1 \in \mathbf{R}.$$
Le second membre est du type $e^{sx}P(x)$ où $s = -1$ et $\deg P = 0$; -1 étant racine double du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = x^2 e^{sx} Q(x)$ où $\deg Q = 0$ c'est à dire sous la forme $y_p(x) = ax^2 e^{-x}$ où a est un réel. On a
$$y_p'(x) = 2axe^{-x} - ax^2 e^{-x}, \qquad y_p''(x) = 2ae^{-x} - 2 \times 2axe^{-x} + ax^2 e^{-x};$$
il vient $y_p''(x) + 2y_p'(x) + y_p(x) = 2ae^{-x}$. Une solution particulière est
$$y_p(x) = x^2 e^{-x},$$
et la solution générale de l'équation est
$$y_g(x) = (x^2 + C_1 x + C_2)e^{-x}, \quad C_1 \in \mathbf{R},\ C_1 \in \mathbf{R}.$$
3. Le polynôme caractéristique est $C(r) = r^2 + 4r + 5$ dont le discriminant est $\Delta = 16 - 20 = -4$; les racines de C sont $r_1 = \frac{-4+2i}{2} = -2 + i$ et $r_2 = \frac{-4-2i}{2} = -2 - i$ ($\alpha = -2$, $\beta = 1$). La solution générale de l'équation homogène est :
$$y_h(x) = (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))\, e^{-2x}, \quad C_1 \in \mathbf{R},\ C_1 \in \mathbf{R}.$$
On cherche une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$. On a
$$y_p'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x), \qquad y_p''(x) = -A\cos(x) - B\sin(x).$$
Par conséquent,
$$y_p''(x) + 4y_p'(x) + 5y_p(x) = (4A + 4B)\cos(x) + (-4A + 4B)\sin(x)\ ;$$
y_p est solution si et seulement si $4A + 4B = 0$ et $-4A + 4B = 8$. On obtient, en additionnant les deux égalités, $8B = 8$ soit $B = 1$ puis $A = -1$:
$$y_p(x) = -\cos(x) + \sin(x).$$
La solution générale de l'équation est
$$y_g(x) = (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))\, e^{-2x} - \cos(x) + \sin(x), \quad C_1 \in \mathbf{R},\ C_1 \in \mathbf{R}.$$