MATH2 : Correction rapide du CC2 du 18 mai 2015.

Exercice 1. Pour tous réels x et y, on obtient, pour les dérivées partielles premières de f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3\, e^{x^2y^3}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2\, e^{x^2y^3},$$

et, pour les dérivées partielles d'ordre 2 de f

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2y^3\, e^{x^2y^3} + 4x^2y^6\, e^{x^2y^3} = 2y^3\left(1+2x^2y^3\right) e^{x^2y^3},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 6x^2y\, e^{x^2y^3} + 9x^4y^4\, e^{x^2y^3} = 3x^2y\left(2+3x^2y^3\right) e^{x^2y^3},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= 6xy^2\, e^{x^2y^3} + 6x^3y^5\, e^{x^2y^3} = 6xy^2\left(1+x^2y^3\right) e^{x^2y^3}.
\end{aligned}$$

Exercice 2. 1. Pour tout (x,y), nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2+2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y+2x.$$

Le point (x,y) est un point critique de f si et seulement si $6x^2+2y=0$ et $-2y+2x$ soit encore $x=y$ et $x(3x+1)=0$.

La fonction f possède deux points critiques : $(0,0)$ et $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

2. Le calcul des dérivées partielles d'ordre 2 de f donne, pour tout (x,y),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 2.$$

Au point $(0,0)$, nous avons $r=0$, $t=-2$, $s=2$ et $rt-s^2=-4<0$. Il s'agit d'un point col.

Au point $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$, nous avons $r=-4$, $t=-2$, $s=2$ et $rt-s^2=4$. Puisque $rt-s^2>0$ et $r<0$, la fonction f possède en ce point un maximum local.

Exercice 3. 1. L'entreprise vend x produits au prix unitaire $p(x)$ dans le premier pays, y produits au prix unitaire $p(y)$ dans le second pour un coût total de fabrication égal à C. Par conséquent, le bénéfice est

$$f(x,y) = xp(x)+yp(y)-C = 20x-2x^2+80y-4y^2-50.$$

2. Des calculs élémentaires donnent pour les dérivées partielles premières

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 20-4x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 80-8y,$$

et pour les dérivées partielles d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -8, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 0.$$

Par conséquent, le point $(5,10)$ est le seul point critique de f et, comme $rt-s^2=32>0$ avec $r=-4<0$, la fonction f possède en ce point un maximum local.

Le bénéfice est maximal lorsque l'entreprise vend 5 produits dans le premier pays et 10 dans le second.