MATH2 : Correction rapide du CC1 du 6 avril 2016.

Exercice 1. 1. La solution générale de l'équation homogène est $y_h(x) = C\,e^{-3x}$, $C \in \mathbf{R}$.

2. Une primitive de la fonction $a(x) = 2/x$ sur $]0, +\infty[$ est $A(x) = 2\ln(x) = \ln(x^2)$. Par conséquent la solution générale de l'équation homogène est $y_h(x) = C\,e^{\ln(x^2)} = C\,x^2$, $C \in \mathbf{R}$.

Exercice 2. 1. (a) La solution générale de l'équation homogène associée à (E1) est $y_h(x) = C\,e^{-2x}$, $C \in \mathbf{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = x(ax+b)e^{-2x} = (ax^2+b)e^{-2x}$. y_p est solution de (E1) si et seulement si, pour tout x, $y_p'(x) + 2y_p(x) = xe^{-2x}$ c'est à dire

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad (2ax+b)e^{-2x} - 2(ax^2+b)e^{-2x} + 2(ax^2+b)e^{-2x} = xe^{-2x} \quad \text{soit} \quad 2a = 1,\ b = 0.$$

Finalement, $y_p(x) = x^2e^{-2x}/2$ et $y_g(x) = (C + x^2/2)\,e^{-2x}$.

(b) La condition $y(0) = 1$ donne $C = 1$ soit $y(x) = (1 + x^2/2)\,e^{-2x}$.

2. On a, d'après le cours, $y_h(x) = C\,e^{-x}$, $C \in \mathbf{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$. Un calcul élémentaire donne

$$\begin{aligned} y_p'(x) + y_p(x) &= -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x) + A\cos(3x) + B\sin(3x) \\ &= (A+3B)\cos(3x) + (B-3A)\sin(3x). \end{aligned}$$

Par conséquent, y_p est une solution si et seulement si $A+3B = 1$ et $B-3A = 0$. En remplaçant B par $3A$ dans la 1re équation, on obtient $A = 1/10$ puis $B = 3/10$ et donc $y_p(x) = (\cos(3x)+3\sin(3x))/10$. Par suite, $y_g(x) = C\,e^{-x} + (\cos(3x) + 3\sin(3x))/10$, $C \in \mathbf{R}$.

Exercice 3. 1. Une primitive de $x \mapsto 2x$ est $x \mapsto x^2$: $y_h(x) = C\,e^{x^2}$, $C \in \mathbf{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = u(x)\,e^{x^2}$. y_p est solution de l'équation si et seulement si $u'(x)e^{x^2} = \sin(x)e^{x^2}$ soit $u'(x) = \sin(x)$. Prenant $u(x) = -\cos(x)$ on a $y_p(x) = -\cos(x)e^{x^2}$ et finalement $y_g(x) = (C - \cos(x))\,e^{x^2}$, $C \in \mathbf{R}$.

2. On réécrit l'équation sous la forme $y'(x) - y(x)/x = \ln(x)/x$. Une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto \ln(x)$: $y_h(x) = C\,e^{\ln(x)} = C\,x$, $C \in \mathbf{R}$. La fonction $y_p(x) = u(x)\,x$ est solution de l'équation si et seulement si $u'(x)\,x = \ln(x)/x$ soit $u'(x) = \ln(x)/x^2$. Une intégration par partie en posant $f'(x) = 1/x^2$, $g(x) = \ln(x)$ donne, puisque $f(x) = -1/x$, $g'(x) = 1/x$,

$$u(x) = \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \int \frac{-1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

Par conséquent, $y_p(x) = -\ln(x) - 1$ et $y_g(x) = C\,x - \ln(x) - 1$, $C \in \mathbf{R}$. La condition $y(1) = 1$ donne $C = 2$ soit $y(x) = 2\,x - \ln(x) - 1$.

Exercice 4. 1. De manière évidente, $z'(t) = x'(t) + y'(t) = 2\,[x(t) + y(t)] - [x(t) + y(t)]$ c'est à dire $z'(t) = x(t) + y(t) = z(t)$. Par conséquent, $z(t) = C\,e^t$ où $C \in \mathbf{R}$. Comme $z(0) = 2$, on a $C = 2$ et $z(t) = 2e^t$.

2. On a alors $x'(t) = 2\,z(t) = 4\,e^t$ c'est à dire $x(t) = 4\,e^t + c$. Comme $x(0) = 3$, $c = -1$ et $x(t) = 4\,e^t - 1$. De la même manière, $y'(t) = -z(t) = -2e^t$ et donc $y(t) = -2\,e^t + k$. Puisque $y(0) = -1$, $k = 1$ et $y(t) = -2e^t + 1$.