Université Savoie Mont Blanc **IUT de Chambéry**
Département de Mathématiques **DUT Génie Civil 1re année**

MATH2 : Correction rapide du CC2 du 1er juin 2016.

Exercice 1. 1. Le polynôme caractéristique est $C(r) = r^2 - 2r - 3$. On a $\Delta = 16$; C possède deux racines -1 et 3. La solution générale de l'équation homogène est : $y_h(x) = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{3x}$, $C_1 \in \mathbf{R}$, $C_2 \in \mathbf{R}$. Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = axe^{-x}$ puisque -1 est racine simple de C. On a $y_p(x) = axe^{-x}$, $y_p'(x) = ae^{-x} - axe^{-x}$, et $y_p''(x) = -2ae^{-x} + axe^{-x}$ de sorte que

$$y_p''(x) - 2\, y_p'(x) - 3\, y_p(x) = -4ae^{-x}.$$

Par conséquent $a = -\dfrac{1}{4}$ et $y_p(x) = -\dfrac{1}{4}xe^{-x}$, $y_g(x) = -\dfrac{1}{4}xe^{-x} + C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{3x}$, $C_1 \in \mathbf{R}$, $C_2 \in \mathbf{R}$.

2. Le polynôme caractéristiques est $C(r) = r^2 - 4r + 5$; son discriminant vaut $\Delta = -4$. C possède deux racines complexes conjuguées : $2 + i$ et $2 - i$. La solution générale de l'équation homogène est $y_h(x) = (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))\, e^{2x}$, $C_1 \in \mathbf{R}$, $C_2 \in \mathbf{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$. On a $y_p'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$, $y_p''(x) = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$, et

$$y_p''(x) - 4y_p'(x) + 5y_p(x) = (A - 8B)\cos(2x) + (B + 8A)\sin(2x).$$

y_p est solution si et seulement si $A - 8B = 1$ et $B + 8A = 0$ soit $A = \dfrac{1}{65}$ et $B = -\dfrac{8}{65}$. Par conséquent, $y_p(x) = (\cos(2x) - 8\sin(2x))/65$ et $y_g(x) = (C_1\cos(x) + C_2\sin(x))\, e^{2x} + (\cos(2x) - 8\sin(2x))/65$, $C_1 \in \mathbf{R}$, $C_2 \in \mathbf{R}$.

La condition $y(0) = 0$ donne directement $C_1 = -\dfrac{1}{65}$. On a d'autre part

$$y'(x) = 2e^{2x}\left(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\right) + e^{2x}\left(-C_1\sin(x) + C_2\cos(x)\right) - \frac{2}{65}\sin(2x) - \frac{16}{65}\cos(2x).$$

La condition $y'(0) = 0$ donne $2C_1 + C_2 - \dfrac{16}{65} = 0$ soit $C_2 = \dfrac{18}{65}$. Finalement

$$y(x) = e^{2x}\left(-\cos(x) + 18\sin(x)\right)/65 + \left(\cos(2x) - 8\sin(2x)\right)/65.$$

Exercice 2. 1. On a, pour tous réels x et y,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -10x + 6y - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x - 4y + 2.$$

(x, y) est un point critique si et seulement si $-5x + 3y = 1$ et $3x - 2y = -1$; ce système linéaire possède une solution unique $(1, 2)$.

Les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6.$$

On a $rt - s^2 = 4 > 0$ et $r = -10 < 0$; f possède au point $(1, 2)$ un maximum local.

2. Cherchons les points critiques de f. Pour tous réels x et y, nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{2x} + 2\left(x + y^2 + 2y\right)e^{2x} = \left(1 + 2x + 2y^2 + 4y\right)e^{2x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2y+2)e^{2x}.$$

(x, y) est un point critique si et seulement si $1 + 2x + 2y^2 + 4y = 0$ et $y + 1 = 0$ c'est à dire $y = -1$ et $x = 1/2$.

Les dérivées partielles secondes de f sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2e^{2x} + 2\left(1 + 2x + 2y^2 + 4y\right) e^{2x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2e^{2x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4(y + 1)e^{2x}.$$

Par conséquent, au point $(1/2, -1)$, on obtient

$$r = 2e, \quad t = 2e, \quad s = 0, \quad rt - s^2 = 4e^2 > 0.$$

Comme $r > 0$, f possède au point $(1/2, -1)$ un minimum local.

Exercice 3. Bien évidemment, $\rho = \dfrac{4m}{\pi h d^2}$ et $d = 0.158 \pm 0.001\ m$, $h = 0.32 \pm 0.001\ m$. On obtient $\rho = 2422.6437\ kg.m^{-3}$. Les dérivées partielles de ρ sont :

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{4}{\pi h d^2} = \frac{\rho}{m}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial h} = -\frac{4m}{\pi h^2 d^2} = -\frac{\rho}{h}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial d} = -2\frac{4m}{\pi h d^3} = -2\frac{\rho}{d}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\Delta\rho &= \left|\frac{4}{\pi h d^2}\right| \Delta m + \left|-\frac{4m}{\pi h^2 d^2}\right| \Delta h + \left|-\frac{8m}{\pi h d^3}\right| \Delta d, \\
&= \frac{4}{\pi h d^2}\, \Delta m + \frac{4m}{\pi h^2 d^2}\, \Delta h + \frac{8m}{\pi h d^3}\, \Delta d, \\
&= 54.175584,
\end{aligned}$$

et $\Delta\rho/\rho = 2.2362175\ \%$.

En normalisant l'écriture :

$$\Delta\rho = 50, \qquad \rho = 2420 \pm 50\ kg.m^{-3}, \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho} = 2.2\,\%.$$