Université Savoie Mont Blanc **IUT de Chambéry**
Département de Mathématiques **DUT Génie Civil 1re année**

MATH2 : Correction rapide du CC1 du 20 mars 2017.

Exercice 1. 1. La solution générale de (1) est $y_h(x) = C\,e^{-2x}$, $C \in \mathbf{R}$.

2. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$; on a alors $y_p'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x)$ et $y_p'(x) + 2y_p(x) = (2A + B)\cos(x) + (-A + 2B)\sin(x)$. y_p est solution de (2) si et seulement si $2A + B = 5$ et $-A + 2B = 0$ c'est à dire $A = 2$ et $B = 1$: $y_p(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$, $y_g(x) = 2\cos(x) + \sin(x) + C\,e^{-2x}$, $C \in \mathbf{R}$.

3. On a $y_h(x) = C\,e^{-x}$, $C \in \mathbf{R}$. Comme $s = a = -1$, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = x(ax + b)e^{-x} = (ax^2 + bx)e^{-x}$. On a $y_p'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx)e^{-x}$ et $y_p'(x) + y_p(x) = (2ax + b)e^{-x}$. Donc $a = 1$, $b = 0$, $y_p(x) = x^2e^{-x}$ et $y_g(x) = (C + x^2)e^{-x}$, $C \in \mathbf{R}$.

4. On réécrit l'équation $y'(x) - \dfrac{1}{x}y(x) = x$. Une primitive de $a(x) = 1/x$ sur $\mathbf{R}_+^*$ est $A(x) = \ln x$. Donc $y_h(x) = Ce^{\ln x} = C\,x$, $C \in \mathbf{R}$. La méthode de la variation de la constante $y_p(x) = u(x)x$ donne la relation $u'(x)x = x$ soit $u'(x) = 1$. On prend $u(x) = x$ pour obtenir $y_p(x) = x^2$ et $y_g(x) = x^2 + C\,x$, $C \in \mathbf{R}$.

Exercice 2. 1. Une primitive de $a(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ est $A(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$; d'où $y_h(x) = C\,e^{\ln\left(x^2+1\right)}$ soit $y_h(x) = C\left(x^2 + 1\right)$, $C \in \mathbf{R}$. La méthode de la variation de la constante $y_p(x) = u(x)\left(x^2 + 1\right)$ donne $u'(x)\left(x^2 + 1\right) = x^4 - 1$ c'est à dire $u'(x) = x^2 - 1$. On prend $u(x) = x^3/3 - x$ pour obtenir $y_p(x) = \left(x^3/3 - x\right)\left(x^2 + 1\right)$ et $y_g(x) = \left(x^3/3 - x + C\right)\left(x^2 + 1\right)$, $C \in \mathbf{R}$.

2. La condition $y(0) = 1$ est équivalente à $C = 1$. D'où $y(x) = \left(x^3/3 - x + 1\right)\left(x^2 + 1\right)$.

Exercice 3. 1. Le polynôme caractéristique est $C(r) = r^2 - 2r + 10$. On a $\Delta = -36$: C possède deux racines complexes conjuguées : $1 + 3i$ et $1 - 3i$. Par conséquent, $y_h(x) = e^x\left(C_1\,\cos(3x) + C_2\,\sin(3x)\right)$, $C_1 \in \mathbf{R}$, $C_2 \in \mathbf{R}$.

2. Le polynôme caractéristique est $C(r) = r^2 + 6r + 9 = (r + 3)^2$. Donc $y_h(x) = (C_1x + C_2)e^{-3x}$, $C_1 \in \mathbf{R}$, $C_2 \in \mathbf{R}$. Comme 0 n'est pas racine de C, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax + b$. y_p est solution si te seulement si $6a + 9(ax + b) = 9ax + (6a + 9b) = 9x$. Donc $a = 1$ et $b = -2/3$. Par suite, $y_g(x) = x - 2/3 + (C_1x + C_2)e^{-3x}$, $C_1 \in \mathbf{R}$, $C_2 \in \mathbf{R}$.

3. Le polynôme caractéristique est $C(r) = r^2 - 4 = (r - 2)(r + 2)$: $y_h(x) = C_1\,e^{-2x} + C_2\,e^{2x}$. Comme 2 est racine simple de C, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = axe^{2x}$: $y_p'(x) = ae^{2x} + 2axe^{2x}$, $y_p''(x) = 4ae^{2x} + 4axe^{2x}$. y_p est solution si et seulement si $y_p''(x) - 4y_p(x) = 4ae^{2x} = 12e^{2x}$ soit $a = 3$. Par conséquent, $y_p(x) = 3xe^{2x}$ et $y_g(x) = C_1\,e^{-2x} + C_2\,e^{2x} + 3xe^{2x}$.

4. La condition $y(0) = 0$ donne $C_1 + C_2 = 0$. On a $y'(x) = -2C_1e^{-2x} + 2C_2e^{2x} + 3e^{2x} + 6xe^{2x}$. La condition $y'(0) = 3$ s'écrit $-2C_1 + 2C_2 + 3 = 3$ soit $-C_1 + C_2 = 0$. Donc $C_1 = C_2 = 0$ et $y(x) = 3xe^{2x}$.