Université Savoie Mont Blanc
Département de Mathématiques

IUT de Chambéry
DUT Génie Civil 1re année

MATH2 : Correction rapide du CC2 du 9 mai 2017.

Exercice 1. On obtient, pour tous réels x et y,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x+y}{1+x^2+xy+2y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x+4y}{1+x^2+xy+2y^2},$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy), \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy),$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\sin(xy), \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -x^2\sin(xy), \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy).$$

Exercice 2. 1. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x-3y-9$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x-2y+1$. Le point (x,y) est critique si et seulement si $6x-3y=9$ et $-3x-2y=-1$. En faisant Eq1 + 2 Eq2, on obtient $-7y=7$ soit $y=-1$ puis $x=1$: f possède un seul point critique $(1,-1)$. On a $r=6$, $t=-2$ et $s=-3$ ce qui donne $rt-s^2=-21<0$. Le point $(1,-1)$ est donc un point selle.

2. On obtient, pour tous réels x et y,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+3(x+2)^2\ln\left(1+y^2\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x+2)^3\,\frac{2y}{1+y^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2+6\,(x+2)\ln\left(1+y^2\right), \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (x+2)^3\,\frac{2\,(1-y^2)}{(1+y^2)^2}, \; \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{6y(x+2)^2}{1+y^2}.$$

Un point (x,y) est critique si et seulement si

$$2x+3(x+2)^2\ln\left(1+y^2\right)=0 \quad \textbf{et} \quad (x+2)^3\,\frac{2y}{1+y^2}=0.$$

La deuxième équation donne trivialement $x=-2$ ou $y=0$. Lorsque $x=-2$, la première équation devient $-4=0$ ce qui bien évidemment est impossible. La seule possibilité est donc $y=0$ qui conduit dans la première équation à $x=0$: $(0,0)$ est le seul point critique.

On a alors $r=2$, $t=16$, $s=0$ et $rt-s^2=32>0$ avec $r=2>0$: f possède au point $(0,0)$ un minimum local.

Exercice 3. On obtient (de manière triviale)

$$\frac{\partial E}{\partial m}(m,v) = \frac{1}{2}v^2, \qquad \frac{\partial E}{\partial v}(m,v) = mv.$$

Par conséquent, $E = \frac{1}{2}mv^2 = 256.60688$, et

$$\Delta E = \left|\frac{1}{2}v^2\right|\,\Delta m + |mv|\,\Delta v = 16.666125, \qquad \frac{\Delta E}{E} = 6.4948084\,\%.$$

On retient, dans les unités du SI,

$$E = 260 \pm 20, \qquad \frac{\Delta E}{E} = 6.5\%.$$