MATH101 — Fiche 2 : Correction des exercices 5 et 6.

Exercice 5. 1. Puisque $(n+1)! = (n+1) \times n!$, nous avons

$$\begin{aligned} A &= \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)\,(n-1)!}, \\ B &= \frac{n+1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n+2-n!}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

2. Notation : pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.

(a) Pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$a = \binom{n}{0} = 1, \quad b = \binom{n}{1} = n, \quad c = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad d = b = n, \quad e = a = 1.$$

(b) Soit $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$. En réduisant au même dénominateur $(n-k)!k!$,

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} = \frac{k(n-1)!}{(n-k)!k!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-k)!k!}, \\ &= \frac{n(n-1)!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

3. (a) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

(b) Le coefficient de x^6 dans le développement de $(x+2)^8$ est $\displaystyle\binom{8}{6} 2^{8-6} = 112$. Il est $\displaystyle\binom{7}{3}(-3)^{7-3}$ soit $35 \times 81 = 2835$ dans le développement de $\left(x^2-3\right)^7$ car $x^6 = \left(x^2\right)^3$.

(c) Le coefficient de x^3y^7 dans le développement de $(x-y)^{10}$ est $\displaystyle\binom{10}{3}(-1)^7 = -120$.

(d) Le coefficient de x^6y^7 dans le développement de $(2x-y)^{13}$ est $\displaystyle\binom{13}{6} 2^6(-1)^7 = -109824$.

Exercice 6. 1. « E est majoré » se traduit par : $\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in E, \quad x \leq M$.

« E n'est pas majoré » se traduit par : $\forall M \in \mathbf{R}, \exists x \in E, \quad x > M$.

2. L'ensemble des minorants de $a = -2$ est $]-\infty, -2]$.

3. (a) A possède un plus grand élément $\max A = \dfrac{1}{2}$ $(n=2)$ et un plus petit élément $\min A = -1$ $(n=1)$. Par conséquent $\sup A = \dfrac{1}{2}$ et $\inf A = -1$.

(b) B possède un plus grand élément $\max B = 1$ $(x=0)$ et $\sup B = \max B$. Par contre B ne possède pas de plus petit élément ; on a $\inf B = 0$ et $0 \notin B$.