NOM : GAUSS **Note : 10/10**

Prénom : Carl Friedrich

Exercice 1 (2 points)**.** Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $|2x-3| \leq 1$.

$$|2x-3| \leq 1 \iff -1 \leq 2x-3 \leq 1 \iff 2 = -1+3 \leq 2x \leq 1+3 = 4 \iff 1 \leq x \leq 2$$

Exercice 2 (3 points)**.** Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation $x^3+2x^2-5x-6>0$.

Soit $P(x) = x^3+2x^2-5x-6$. Puisque $P(-1) = 0$, on peut factoriser $P(x)$ par $x+1$. La factorisation s'écrit $P(x) = (x+1)\left(ax^2+bx+c\right)$. De manière évidente, $a = 1$, $c = -6$ et $P(x) = (x+1)\left(x^2+bx-6\right)$. Pour déterminer b, comparons les termes en x : pour P, c'est $-5x$ et dans le développement de $(x+1)\left(x^2+bx-6\right)$ c'est $(b-6)x$. D'où $b = 1$ et $P(x) = (x+1)\left(x^2+x-6\right)$.
Cherchons les racines de x^2+x-6. On a $\Delta = 1-4\times(-6) = 25$; x^2+x-6 possède deux racines : $(-1-5)/2 = -3$ et $(-1+5)/2 = 2$.
Finalement, P possède trois racines réelles, -3, -1 et 2, et $P(x) = (x+3)(x+1)(x-2)$.
En remarquant que P change de signe dès qu'on passe une racine et que $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ ou en faisant un tableau de signes, on obtient

$$\{x : P(x) > 0\} =]-3,-1[\cup]2,+\infty[.$$

Exercice 3 (5 points : 1+2+2)**.**

1. Trouver a et b tels que, pour tout entier $k \geq 1$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

On a, en réduisant au même dénominateur, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}.$$

Par identification, $a+b=0$ et $a=1$ c'est à dire $a=1$ et $b=-1$:

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Exprimer, en fonction de n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Pour ne pas utiliser de points de suspension :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

3. On suppose que, pour tout entier k, $1 \leq u_k \leq 2^k$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Donner, en fonction de n, un encadrement de $G_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} 1 \leq \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k,$$

soit encore, utilisant la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique,

$$n+1 \leq \sum_{k=0}^{n} u_k \leq 2^{n+1} - 1.$$

On peut aussi utiliser la majoration (moins précise)

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \leq \sum_{k=0}^{n} 2^n = (n+1)2^n.$$