UNIVERSITÉ DE SAVOIE **LST – S3**
2012–2013

MATH326 : Mathématiques pour les sciences 3

Contrôle continu 1 du Mercredi 10 octobre 2012 — 16-17h

Documents et calculatrices non autorisés.

Lors de l'appréciation des copies, il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la présentation, de la clarté de la rédaction et de la précision des démonstrations.

Exercice 1.

1. Donner la valeur exacte de chacune des sommes

$$\sum_{n=2}^{6} 2^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=4}^{+\infty} 3^{-n}.$$

2. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 4^{-n} = \left(\sum_{n=2}^{+\infty} 2^{-n}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^{-n}\right).$$

Exercice 2. On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n!\, e^n}{n^n}$, pour $n > 0$.

1. Calculer la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général (u_n) ?
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e^1$.
3. En déduire que (u_n) est croissante.
4. Conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n>0} u_n$.

Exercice 3. Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{\frac{1}{n}}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n+1}}\right)$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^{\ln(n)}}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{n^{3n}}$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln(n)\, 5^{-\sqrt{n}}$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n^2)}{n^4 + n^2 + 1}$

Fin de l'épreuve