Université de Savoie Année 11/12

Mathématiques pour les sciences III (MATH326 – 6 ECTS)

Corrigé succint du contrôle continu 1 du mercredi 12 octobre 2011 (10-11h)

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite numérique définie par $u_n \coloneqq \dfrac{1}{(n+3)(n+4)}$.

Puisque $n^2u_n \longrightarrow 1$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, la règle de Riemann avec $\alpha \coloneqq 2 > 1$ entraîne la convergence de la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$\frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} ,$$

ce qui conduit à

$$S_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+4} = \sum_{k=3}^{n+3} \frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{n+4} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+4} .$$

Il en résulte que la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des sommes partielles converge (redonnant ainsi la convergence de la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$) et a pour limite $S \coloneqq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = 1/3$.

Exercice 2.

- **Point 1) :**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite numérique définie par $u_n \coloneqq \dfrac{\ln(n^n)}{(\ln(n))^n}$.

Pour tout entier $n \geqslant 9$, on a

$$\ln(n) \geqslant \ln(9) = 2\ln(3) \geqslant 2\ln(e) = 2,$$

d'où

$$0 \leqslant u_n = n/(\ln(n))^{n-1} \leqslant n/2^{n-1} \eqqcolon v_n.$$

Or $n^2v_n \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, ce qui entraîne la convergence de la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 9} v_n$ (règle de Riemann avec $\alpha \coloneqq 2 > 1$), et donc celle de $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$.

Remarque (preuve utilisant la règle de Cauchy) :

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $0 \leqslant u_n = n\ln(n)/(\ln(n))^n \leqslant n^2/(\ln(n))^n$ (car $\ln t \leqslant t-1 \leqslant t$ pour tout réel $t > 0$) et par suite

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant n^{2/n}/\ln(n) = e^{2\ln(n)/n}/\ln(n) \longrightarrow e^0 \times 0 = 0 \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Cette limite étant strictement inférieure à un, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge d'après la règle de Cauchy.

- **Point 2) :**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite numérique définie par $u_n \coloneqq \dfrac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n > 0$ et

$$u_{n+1}/u_n \;=\; \frac{(2n-1)2^{2n-1}}{(2n+1)2^{2n+1}} \;=\; \frac{(2n-1)}{(2n+1)} \times \frac{1}{2^2} \;\longrightarrow\; 1/4 \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Cette limite étant strictement inférieure à un, la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge d'après la règle de d'Alembert.

Remarque (preuve utilisant le théorème de comparaison) :
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$0 \leqslant u_n \;=\; \frac{2}{(2n-1)} \times \frac{1}{4^n} \;\leqslant\; \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

puisque $2/(2n-1) \leqslant 1$.

Comme on a $|1/4| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ converge, et donc $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ aussi d'après le théorème de comparaison.

- **Point 3) :**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite numérique définie par $u_n \coloneqq \dfrac{\cos(n^3)}{n^4 + e^{-n}}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{n^4 + e^{-n}} \leqslant 1/n^4,$$

ce qui prouve que la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge (absolument) puisque la série de Riemann d'exposant $\alpha \coloneqq 4 > 1$ converge.

- **Point 4) :**

Soit $(u_n)_{n \geqslant 2}$ la suite numérique définie par $u_n \coloneqq \dfrac{(-1)^n}{n \ln(n)}$.

Remarquons tout d'abord que la série numérique $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ est alternée avec $|u_n| \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Par ailleurs, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| - |u_n| \;&=\; \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \frac{1}{n\ln(n)} \\ &=\; \frac{n\ln(n) - (n+1)\ln(n+1)}{n(n+1)\ln(n)\ln(n+1)} \\ &=\; \frac{n[\ln(n) - \ln(n+1)] - \ln(n+1)}{n(n+1)\ln(n)\ln(n+1)} \;\leqslant\; 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(|u_n|)_{n \geqslant 2}$ est décroissante, ce qui entraîne que la série numérique $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ converge d'après la règle de Leibniz.

- **Point 5) :**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite numérique définie par $u_n \coloneqq \dfrac{(2n)!}{n!\,(2n)^n}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n > 0$ et

$$u_{n+1}/u_n \;=\; \frac{n!\,(2n)^n}{(2n)!}\times\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(2n+2)^{n+1}} \;=\; \frac{2n+1}{n+1}\times\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \;=\; \frac{2n+1}{n+1}\times e^{n\ln[n/(n+1)]}$$

avec

$$n\ln[n/(n+1)] \;=\; n\ln[1-1/(n+1)] \;\sim\; -n/(n+1) \;\longrightarrow\; -1 \quad \text{lorsque} \quad n\longrightarrow+\infty.$$

Il en résulte que $u_{n+1}/u_n \longrightarrow 2\times e^{-1} = 2/e < 1$ lorsque $n\longrightarrow+\infty$, d'où la convergence de la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ d'après la règle de d'Alembert.

• **Point 6) :**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite numérique définie par $u_n \coloneqq e^{-\sqrt{n}}$.

Sachant qu'on a $x^4e^{-x}\longrightarrow 0$ lorsque $x\longrightarrow+\infty$, on en déduit $n^2u_n\longrightarrow 0$ lorsque $n\longrightarrow+\infty$ (avec $x\coloneqq\sqrt{n}\longrightarrow+\infty$), ce qui montre que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge d'après la règle de Riemann avec $\alpha\coloneqq 2>1$.

Remarque :

Pour tout entier $n\geqslant 0$, on a $u_n>0$ et

$$u_{n+1}/u_n \;=\; e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} \;=\; e^{-1/(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} \;\longrightarrow\; e^0=1 \quad\text{lorsque}\quad n\longrightarrow+\infty,$$

ce qui ne permet pas de conclure ici à l'aide de la règle de d'Alembert (et donc avec celle de Cauchy non plus).

Exercice 3.

1. Soit $n\geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2}-u_{n+1} = \frac{3u_{n+1}+u_n}{4}-u_{n+1} \\ &= \frac{u_n-u_{n+1}}{4} = -\frac{1}{4}(u_{n+1}-u_n) \\ &= -\frac{1}{4}v_n. \end{aligned}$$

   Autrement dit, (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$, et de premier terme $v_0 = u_1-u_0=-1$.

2. La série de terme général (v_n) est (absolument) convergente car $|-\dfrac{1}{4}|<1$. De plus la somme de la *série géométrique* $\sum v_n$, que l'on notera S, est égale à $-\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}} = -\dfrac{4}{5}$.

   Il en va donc de même de la *série télescopique* $\sum u_{n+1}-u_n$. Or, un calcul direct (ou un résultat du cours) montre que cette série télescopique est convergente ssi (u_n) converge vers une limite $\ell\in\mathbf{C}$. Et dans ce cas, la somme S de $\sum u_{n+1}-u_n$ est donnée par :

$$S=\ell-u_0.$$

   Ou encore :

$$\ell = 2-\frac{4}{5}=\frac{6}{5}.$$

Exercice 4.

1. Soit $n \geqslant 1$. On a $1 + n^2 u_n \geqslant n^2 u_n$ et, comme $u_n \geqslant 0$,

$$0 \leqslant v_n \leqslant \frac{u_n}{1 + n^2 u_n} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

   La série $\sum n^{-2}$ étant convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), il en va de même de la série $\sum v_n$ d'après le résultat de comparaison sur les séries à termes positifs.

2. (a) Soit $n \geqslant 0$. Puisque $u_n \geqslant 0$, $1 + u_n \geqslant 1$ et

$$0 \leqslant w_n = \frac{u_n}{1 + u_n} \leqslant u_n.$$

   D'après le résultat de comparaison sur les séries à termes positifs, $\sum w_n$ converge puisque $\sum u_n$ est convergente.

   (b) Soit $n \geqslant 0$. Comme $u_n \geqslant 0$, on a $0 \leqslant w_n < 1$ et $(1 + u_n)w_n = u_n$; par conséquent

$$u_n = \frac{w_n}{1 - w_n}.$$

   Puisque $\sum w_n$ converge, $\lim_{n \longrightarrow \infty} w_n = 0$; en particulier, il existe un entier p tel que, pour tout $n \geqslant p$, $w_n \leqslant \frac{1}{2}$ soit $1 - w_n \geqslant \frac{1}{2}$. Pour tout $n \geqslant p$, on a, puisque $w_n \geqslant 0$,

$$0 \leqslant w_n \leqslant u_n = \frac{w_n}{1 - w_n} \leqslant 2 w_n.$$

   $\sum u_n$ est convergente d'après le résultat de comparaison sur les séries à termes positifs.