UFR SFA & Polytech
Université de Savoie

Licence et PeiP 2e année
Année 2011/2012

# MATH326 : Mathématiques pour les sciences 3

Contrôle continu n° 2 : durée une heure.

*Les documents sont interdits de même que l'usage de la calculatrice.*

Mercredi 23 novembre 2011.

**Exercice 1** (6 points)**.**

1. Déterminer la nature de la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$.
2. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbf{R}$ la série $\sum x^n$ est-elle convergente ? (*dans cette question, on ne demande pas de justification*)
3. Pour $|x| < 1$, donner la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
4. Montrer que la série de fonctions $\sum x^n$ est normalement convergente sur $[0, 1/2]$.
5. On pose, pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\cos(n^3x^2)}{n}$.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbf{R}$.
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

**Exercice 2** (4 points)**.**

On considère, pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{x^2+n}$.

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$. On note $f$ cette limite.
2. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers $f$ sur $[-1, 1]$.

**Exercice 3** (10 points)**.**

On considère, pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$, $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n(x)$ est convergente si et seulement si $x > 0$.
   Pour $x > 0$, on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Soit $a > 0$. Montrer que $S$ est dérivable sur $[a, +\infty[$ et calculer, pour $x \geqslant a$, la valeur de la somme $S'(x)$. En déduire que $S$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $0 \leqslant S(x) \leqslant -S'(x)$.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$. En déduire que, pour tout $x > 0$, $S(x) = -\ln(1 - e^{-x})$.
5. (a) Calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{S(x)}{|\ln x|}$.
   (b) La série de fonctions $\displaystyle\sum \frac{u_n(x)}{|\ln x|}$ est-elle uniformément convergente sur $]0, 1/2]$ ?

Fin de l'épreuve