UFR SFA & Polytech
Université de Savoie

Licence et PeiP 2e année
Année 2011/2012

MATH326 : Mathématiques pour les sciences 3

Contrôle continu n° 2 bis : durée une heure.

Mardi 13 décembre 2011.

Exercice 1 (6 points)**.** Les trois questions sont indépendantes.

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n}$.
2. Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \dfrac{e^{-x^{2n}}}{3^n}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbf{R}$.
3. Pour $x \in \mathbf{R}_+$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n(x) = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^n$.
   (a) Pour quelles valeurs de $x \in \mathbf{R}_+$, la série $\sum u_n(x)$ est-elle convergente ?
   (b) Pour $x \geqslant 0$, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
   (c) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est normalement convergente sur $[0,1]$.
   (d) Montrer qu'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)dt = \frac{1}{2}$.

Exercice 2 (4 points)**.** On considère, pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbf{R}$
2. Calculer, pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.
3. La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément vers 0 sur $\mathbf{R}$?

Exercice 3 (10 points)**.** On considère, pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \geqslant 0$, $u_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x}$. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Soit $x \geqslant 0$. Montrer que la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente si et seulement si $x > 0$.
   Pour $x > 0$, on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Soit $a > 0$. Montrer que S est dérivable sur $[a, +\infty[$ et exprimer S' comme une série de fonctions. En déduire que S est dérivable sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $0 \leqslant S(x) \leqslant \dfrac{\pi^2}{6x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
4. Pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, on note $v_n(x) = \dfrac{1}{n^2} - xu_n(x)$.
   (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $0 \leqslant v_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n^4x}$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xS(x) = \frac{\pi^2}{6}$.

`Fin de l'épreuve`