UFR SFA & Polytech
Université de Savoie

Licence et PeiP 2e année
Année 2011/2012

MATH326 : Mathématiques pour les sciences 3

Contrôle continu n° 3 : Mercredi 4 janvier 2012 (15h15-16h15).

Les documents sont interdits de même que l'usage de la calculatrice.

Exercice 1.

1. Donner le rayon de convergence des séries entières

   (a) $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ sans justification ;   (b) $\sum_{n\geqslant 1} nz^{n-1}$ avec justification.

2. Donner la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n3^{-n}$.

Exercice 2. On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}$.

1. Calculer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Pour $x \in]-R, R[$, quelle est la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}$?
3. Montrer que $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \alpha_n$ où $\alpha_n = \frac{1}{2^n(2n+1)n!}$.

Exercice 3. On considère la fonction $2\pi-$périodique définie par $f(t) = 1$ si $t \in [0, \pi[$ et $f(t) = 0$ si $t \in [\pi, 2\pi[$.

1. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 4\pi[$.
2. Calculer les coefficients trigonométriques de la série de Fourier de f.
3. Pour $t \in \mathbf{R}$, on note $S(f)(t)$ la somme de la série de Fourier de f au point t.

   (a) Donner la valeur de $S(f)(0)$, $S(f)\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $S(f)\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

   (b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

4. Déterminer la valeur de la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.
5. La série de Fourier de f converge-t-elle uniformément sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$?

Fin de l'épreuve