Intégrales Généralisées

- Toutes les fonctions sont continues par morceaux même s'il n'en est pas fait mention !

1. Définitions et Exemples.

- $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux
- Pour tout x, on peut calculer
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
- La fonction F possède-t-elle une limite quand $x \to +\infty$?

Définition. Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux.
On dit que l'intégrale généralisée de f sur $[a, +\infty[$ converge lorsque $\int_a^x f(t)\,dt$ possède une limite finie quand $x \to +\infty$. On note dans ce cas

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Sinon on dit que l'intégrale généralisée est divergente.

Exemple(s). • $f(t) = e^{-t}$: l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - e^{-x}\right) = 1.$$

Remarque(s). • Une intégrale peut être généralisée ailleurs qu'en $+\infty$!

- ⋆ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, 1]$;
- ⋆ l'intégrale de f sur $]0, 1]$ converge !

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{x\to 0} 2\left(1 - \sqrt{x}\right) = 2.$$

- Une intégrale peut être généralisée en plusieurs endroits !

- ⋆ $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$ ou $g(x) = (x + 1)e^{-|x|}$ sur $] - \infty, +\infty[$
- ⋆ $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si $\int_0^1 f(t)\,dt$ **et** $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ convergent

$\star$ $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ converge si $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ **et** $\int_{+\infty}^{0} g(t)\,dt$ convergent

- Si les intégrales généralisées de f et g sur $[a,+\infty[$ convergent, alors celle de $f+\lambda g$ converge aussi et
$$\int_a^{+\infty} (f+\lambda g)(t)\,dt = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt + \lambda \int_a^{+\infty} g(t)\,dt.$$

2012/2013 : fin du cours 6

2. Fonctions positives.

- $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}_+$: pour tout $x \geq a$, $f(x) \geq 0$; $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante

  $\star$ F possède une limite finie en $+\infty$ ssi F est majorée

  $\star$ sinon $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

Théorème (Intégrales de Riemann)**.**

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ *converge ssi* $\alpha > 1$ *;*

2. $\int_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$ *converge ssi* $\alpha < 1$*.*

Démonstration. • Si $\alpha \neq 1$, une primitive de $t \longmapsto t^{-\alpha}$ est $t \longmapsto (-\alpha+1)^{-1}t^{-\alpha+1}$

- Pour $0 < x < 1 < y$,
$$\int_1^y \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{y^{\alpha-1}}\right), \quad \text{si } \alpha \neq 1, \qquad \int_1^y \frac{dt}{t} = \ln y,$$
$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-x^{1-\alpha}\right), \quad \text{si } \alpha \neq 1, \qquad \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x$$

- Par conséquent,
$$\lim_{y\to+\infty} \int_1^y \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}, \quad \text{si } \alpha > 1, \qquad \lim_{y\to+\infty} \int_1^y \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty, \quad \text{si } \alpha \leq 1,$$
$$\lim_{x\to0} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}, \quad \text{si } \alpha < 1, \qquad \lim_{x\to0} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty, \quad \text{si } \alpha \geq 1. \qquad \square$$

Remarque(s). • $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est divergente pour tout α !

Théorème (Comparaison). *On suppose que* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *pour tout* $x \geq a$.

1. *Si l'intégrale de* g *sur* $[a, +\infty[$ *est convergente, alors celle de* f *aussi*
2. *Si l'intégrale de* f *sur* $[a, +\infty[$ *diverge, celle de* g *aussi*

- $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$; on a $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente.

Corollaire. *Soient* f *et* g *deux fonctions positives sur* $[a, +\infty[$.

1. *Si* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l > 0$, *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ *et* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ *ont même nature.*
2. *Si* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ *converge implique que* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ *converge.*
3. *Si* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ *diverge implique que* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ *diverge.*

Exemple(s). • $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\, dt$ converge pour tout $\alpha > 0$ puisque $x^2\, e^{-\alpha x} \longrightarrow 0$ si $x \to \infty$.

- $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ converge car $e^x e^{-x^2} \longrightarrow 0$ si $x \to +\infty$.

3. Fonctions quelconques.

Proposition. *Soit* $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ *continue par morceaux.*
Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ *converge alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *converge également.*

Remarque(s). • On dit que l'intégrale de f est absolument convergente.

- On peut avoir $\displaystyle\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$ divergente et $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ convergente ; on dit que $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ est semi-convergente.

Démonstration. • $0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$ est intégrable

- il suffit d'écrire $f(x) = |f(x)| - (|f(x)| - f(x))$! □

Remarque(s). Si f est bornée sur $]a, b[$ avec a et b **réels**, alors $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\, dx$ converge.

Exemple(s). • $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ est semi-convergente.

- ⋆ f est bornée sur $]0, 1[$ car $|\sin x| \leq |x|$ pour tout réel x.
- ⋆ Sur $[1, +\infty[$ on fait une IPP

$$\int_1^z \frac{\sin x}{x}\, dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{x=1}^{x=z} - \int_1^z \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

* $\star$ Le premier terme tend vers $\cos 1$ quand $z \to \infty$
* $\star$ la dernière intégrale est absolument convergente.

- On a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ divergente puisque

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx$$

- Plus généralement, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ sont :
  * $\star$ absolument convergentes pour $\alpha > 1$;
  * $\star$ semi-convergentes pour $0 < \alpha \leq 1$.

`2012/2013 : fin du cours 7`

`Pas fait`

Proposition (Critère d'Abel)**.** *Soient f et g continues par morceaux sur $[a, +\infty[$. On suppose que f est décroissante avec $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et qu'il existe $K \geq 0$ tel que*

$$\forall x \geq a, \qquad \left|\int_a^x g(t)\,dt\right| \leq K.$$

Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ est convergente.