Séries de Fonctions

1. Définitions et exemples.

- Dans toute ce paragraphe, X et Y sont des parties de $\mathbf{C}$, $X \subset Y$.
- Pour tout entier n, u_n est une fonction définie sur Y à valeurs dans $\mathbf{C}$, $u_n : Y \longrightarrow \mathbf{C}$.
- On s'intéresse à la convergence de la série $\sum u_n(x)$ pour $x \in Y$
  - ⋆ pour $x \in Y$, on se demande si la suite $(S_n(x))_{n\geq 0}$ possède une limite où

$$\forall x \in Y, \qquad S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$$

  - ⋆ Si, lorsque $x \in X$, la suite $(S_n(x))_{n\geq 0}$ possède une limite, on note $S(x)$ cette limite.
  - ⋆ On définit alors la fonction S en posant

$$\forall x \in X, \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x).$$

  - ⋆ On souhaite étudier les propriétés de la fonction S à l'aide de celles des fonctions u_n.

Exemple(s) (Série géométrique)**.** • $Y = \mathbf{R}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n : x \longmapsto x^n$

- Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \begin{cases} n+1, & \text{si } x = 1, \\ \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

- $(S_n(x))_{n\geq 0}$ possède une limite ssi $|x| < 1$: la série $\sum u_n(x)$ converge ssi $|x| < 1$
  - ⋆ On a $X =]-1, 1[$!
- Pour tout $|x| < 1$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

1.1. Convergence simple.

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n est une fonction définie sur Y.

Définition. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $X \subset Y$ si, pour tout $x \in X$, la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente.
Dans ce cas, on désigne par $S(x)$, la valeur de la limite :

$$\forall x \in X, \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x).$$

- Lorsqu'on étudie la convergence simple de $\sum u_n$, c'est à dire lorsqu'on étudie la convergence de la série $\sum u_n(x)$ à x fixé tous les résultats sur les séries numériques sont applicables.
- L'ensemble $D = \Big\{ x \in Y : \sum u_n(x) \text{ converge } \Big\}$ est appelé le *domaine de convergence* de la série de fonctions $\sum u_n$.

Exemple(s). 1. $Y = \mathbf{R}$, $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$, $n \geq 0$. D'après la règle de d'Alembert, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sum u_n(x)$ converge absolument. $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$.

2. $Y = \mathbf{R}$, $u_n(x) = (-1)^n/\sqrt{x^2 + n^2}$, $n \geq 1$. D'après le critère des séries alternées, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sum u_n(x)$ est convergente. $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$.

Remarque(s). • Si $\sum u_n$ converge simplement sur X, alors $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = 0$, pour tout $x \in X$.

- La réciproque est fausse ; prendre $u_n(x) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1.2. Convergence normale.

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n est une fonction définie sur Y.

Définition. La série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente sur $X \subset Y$ si la série numérique $\sum \sup_{x \in X} |u_n(x)|$ est convergente.

- Ceci signifie qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ de réels positifs telle que :
  1. pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in X$, $|u_n(x)| \leq \alpha_n$;
  2. $\sum \alpha_n$ est convergente.

Exemple(s). • La série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha + x^4}$ est normalement convergente sur $\mathbf{R}$ dès que $\alpha > 1$.

- En effet, pour $n \geq 1$ et $x \in X$,

$$|u_n(x)| = \frac{1}{n^\alpha + x^4} \leq \frac{1}{n^\alpha} = \alpha_n$$

- $\sum \alpha_n$ converge puisque $\alpha > 1$.

Proposition. *Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur X alors $\sum u_n$ converge simplement sur X.*

Remarque(s). • Attention la réciproque est fausse.

  ⋆ $f_n(x) = (-1)^n/\sqrt{n^2+x^2}$; $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)| = 1/n$.

- En fait, si $\sum u_n$ converge normalement sur X, pour tout $x \in X$, $\sum u_n(x)$ converge absolument.

Exemple(s). La série de t.g. $u_n(x) = \sin(x/n)/n$, $n \geq 1$, est normalement convergente sur $[-a, a]$ pour tout $a > 0$ mais n'est pas normalement convergente sur $\mathbf{R}$.

`2012/2013 : fin du cours 8`

Remarque(s). • Si $\sum u_n$ converge normalement sur X, alors

$$R_n^* = \sum_{k>n} \sup_{x\in X} |u_k(x)| \longrightarrow 0, \qquad \text{si } n \to +\infty.$$

- S'il existe une suite de points de X, $(x_n)_{n\geq 0}$, telle que $\sum |u_n(x_n)|$ diverge, alors $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur X.

Plan d'étude d'une série de fonctions.

- On commence par étudier la convergence simple de $\sum u_n$
  - ⋆ On détermine à cette étape l'ensemble X
- On étudie la convergence normale de $\sum u_n$ sur X ou sur une partie de X

2. Régularité de la somme.

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n est une fonction définie sur X
- Si $\sum u_n$ converge simplement sur X, on note S la fonction

$$\forall x \in X, \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

Théorème (Interversion des limites). *Soit x_0 un point adhérent à X. On suppose que*

1. *pour tout $n \geq 0$, $\lim_{x\to x_0} u_n(x) = l_n$,*
2. *la série de fonctions $\sum u_n$ converge **normalement** sur X.*

Alors, la série $\sum l_n$ est (absolument) convergente et de plus

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n.$$

Remarque(s). • Si $X =]a,b[$, un point adhérent à X est soit un point de l'intervalle $]a,b[$ soit l'une des extrémités a ou b.

• Si X contient un intervalle du type $[r,+\infty[$, le résultat est encore valable pour $x_0 = +\infty$. Idem avec $-\infty$!

Corollaire (Continuité)**.** *Supposons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge **normalement** sur X et notons $S = \sum_{n\geq 0} u_n$. Alors,*

1. *si toutes les fonctions u_n sont continues au point $x_0 \in X$, S est continue au point x_0,*
2. *si toutes les fonctions u_n sont continues sur X, S est continue sur X.*

Exemple(s). • $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^4}$, $n \geq 1$; $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbf{R}$.

- ⋆ Pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$.
- ⋆ $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n\geq 0} u_n(x) = \sum_{n\geq 0} 0 = 0$

• $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n(1+nx)}$, $x \geq 0$, $n \geq 1$;

- ⋆ $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$;
- ⋆ $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$;
- ⋆ comme toutes les u_n sont continues sur $[a,+\infty[$, $\sum_{n\geq 1} u_n$ est continue sur $[a,+\infty[$;
- ⋆ ceci étant vrai pour tout $a > 0$, $\sum_{n\geq 1} u_n$ est continue sur $]0,+\infty[$.

`2012/2013 : fin du cours 9`

Théorème (Intégration)**.** *On suppose les fonctions u_n continues par morceaux sur l'intervalle $[a,b]$.*
*Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge **normalement** sur $[a,b]$, alors*

1. *la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_a^b u_n(t)\,dt$ est (absolument) convergente ;*
2. *d'autre part*

$$\int_a^b \sum_{n\geq 0} u_n(t)\,dt = \sum_{n\geq 0} \int_a^b u_n(t)\,dt.$$

Exemple(s). • Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

- En effet, soit $0 < x < 1$. $\sum t^n$ est NCV sur $[0, x]$ et $\sum_{n\geq 0} t^n = 1/(1-t)$
- D'après le théorème,

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Remarque(s). Plus généralement, si la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, b]$, alors la série de fonctions de terme général $U_n(x) = \displaystyle\int_a^x u_n(t)\, dt$ est normalement convergente sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$,

$$\int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x u_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x).$$

Théorème (Dérivation)**.** *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et $\sum u_n$ une série de fonctions qui converge simplement sur I. On note, pour $x \in I$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.*

On suppose que

1. *pour tout n, u_n est dérivable (resp. $\mathcal{C}^1$) sur I ;*
2. *la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement sur I.*

Alors, la fonction S est dérivable (resp. $\mathcal{C}^1$) sur I et

$$\forall x \in I, \qquad S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x).$$

Remarque(s). • u est $\mathcal{C}^1$ si u est dérivable et u' continue.

- Attention c'est la série des dérivées qui doit converger normalement.

Exemple(s). • $v_n(x) = ne^{-nx}$, $n \geq 0$. Déterminer $T(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$.

`2012/2013 : fin du cours 10`
