Compléments sur les séries

1. Séries alternées.

Définition. Une série réelle $\sum u_n$ est alternée lorsque, pour tout $n \geq 0$, $u_n \times u_{n+1} \leq 0$.

- On a dans ce cas $u_n = (-1)^n |u_n|$ pour tout n ou $u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$ pour tout n
- Par exemple, $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$.

Proposition (Critère des séries alternées). *Soit $\sum u_n$ une série alternée. Si la suite $(|u_n|)$ est décroissante et converge vers 0, la série $\sum u_n$ est convergente.*
De plus, la somme de la série $S = \sum_{n\geq 0} u_n$ est comprise entre S_n et S_{n+1} et l'on a

1. $|S - S_n| \leq |u_{n+1}|$;
2. $S - S_n$ *du signe de* u_{n+1}.

Démonstration. • On traite seulement le cas $u_n = (-1)^n |u_n|$.

- On montre que les suite (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En effet,
  - ⋆ $S_{2(n+1)} - S_{2n} = (-1)^{2n+2}|u_{2n+2}| + (-1)^{2n+1}|u_{2n+1}| = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$ puisque $|u_n|$ est décroissante.
  - ⋆ $S_{2n+1} - S_{2n-1} = -|u_{2n+1}| + |u_{2n}| \geq 0$ puisque $(|u_n|)$ est décroissante
  - ⋆ $|S_{2n+1} - S_{2n}| = |(-1)^{2n+1}|u_{2n+1}| = |u_{2n+1}| \longrightarrow 0$.
- Par conséquent, (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont convergentes de même limite S.
  - ⋆ Les résultats s'en suivent immédiatement.

□

Exemple (Série de Riemann alternée). • $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 0$.

- Si $0 < \alpha \leq 1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge mais $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right|$ diverge !

Proposition (Critère d'Abel). *Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite positive et $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe. On suppose que*

1. *il existe $K \geq 0$ tel que*

$$\forall n \geq 0, \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| \leq K$$

2. $(a_n)_{n\geq 0}$ *est décroissante et converge vers* 0.

Alors la série $\sum a_n b_n$ *est convergente.*

- On retrouve le résultat sur les séries alternées : $b_n = (-1)^n$, $a_n = |u_n|$.

Exemple (Application typique)**.** Soit (a_n) une suite décroissante et convergente de limite 0. $\sum a_n \sin(nx)$ converge pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $\sum a_n \cos(nx)$ converge pour tout $x \neq 0 \mod 2\pi$.

- Si $x = 0 \mod 2\pi$, $\sum a_n \sin(nx)$ est la série nulle !

`2012/2013 : fin du cours 5`

- On se ramène au cas où $0 < x < 2\pi$. Montrons que $\sum a_n e^{inx}$ est convergente. On a pour tout n, puisque $e^{ix} \neq 1$,
$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}} \frac{e^{-ix(n+1)/2}-e^{ix(n+1)/2}}{e^{-ix/2}-e^{ix/2}} = e^{inx/2}\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

- On en déduit que, pour $0 < x < 2\pi$,
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos(nx/2)\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sin(nx/2)\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

- Par conséquent, pour $0 < x < 2\pi$,
$$\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}.$$

- D'après le critère d'Abel, $\sum a_n e^{inx}$ est convergente pour $0 < x < 2\pi$
- Il en va de même de $\sum a_n \cos(nx) = \sum \mathrm{Re}(a_n e^{inx})$ et $\sum a_n \sin(nx) = \sum \mathrm{Im}(a_n e^{inx})$

2. Utilisation des développements limités.

- Nature de la série de terme général
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{\varepsilon_n}{n^3}\right), \quad \varepsilon_n = \varepsilon\left(n^{-1}\right) \longrightarrow 0$$
$$= \frac{1}{6n^{5/2}} - \frac{\varepsilon_n}{n^{5/2}}, \quad \varepsilon_n \to 0.$$
  - ⋆ Si n grand, u_n est positif
  - ⋆ Critère de Riemann avec $\alpha = 5/2 > 1$: $\sum u_n$ cv
- Nature de la série de terme général
$$u_n = e^{(-1)^n/\sqrt{n}} - 1 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}, \quad \varepsilon_n = \varepsilon\left((-1)^n n^{-1/2}\right) \longrightarrow 0$$

- ⋆ La série de t.g. $v_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ est cv d'après les séries alternées
- ⋆ Si n est grand $w_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2} + \varepsilon_n\right)$ est positif ! Critère de Riemann $\alpha = 1$, $\sum w_n$ diverge
- ⋆ Par conséquent $\sum u_n = \sum(v_n + w_n)$ diverge
- ⋆ Pourtant $u_n \sim (-1)^n/\sqrt{n}$! Attention, u_n n'est pas positif !

3. Produit de Cauchy.

`Pas fait`

- $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites. Pour $n \geq 0$, on pose

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k.$$

  - ⋆ La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est le produit de convolution des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.
  - ⋆ La série $\sum w_n$ est appelée le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$

Théorème (Mertens)**.** *Si $\sum u_n$ converge absolument et $\sum v_n$ converge (resp. converge absolument), alors $\sum w_n$ converge (resp. converge absolument) et*

$$\sum_{n\geq 0} w_n = \sum_{n\geq 0} u_n \times \sum_{n\geq 0} v_n.$$

- L'application standard est $e^{x+y} = e^x e^y$
  - ⋆ Pour $z \in \mathbf{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$. La série précédente est ACV (d'Alembert).
  - ⋆ $u_n = x^n/n!$, $v_n = y^n/n!$,

$$w_n = (u \star v)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

  - ⋆ Mertens

$$\sum_{n\geq 0} w_n = \sum_{n\geq 0} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \times \sum_{n\geq 0} \frac{y^n}{n!}.$$