Les séries numériques — Généralités

- $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$
- $(u_n)_{n\geq 0}$ suite dans $\mathbf{K}$
  - ⋆ On forme les sommes

$$S_0 = u_0, \qquad S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

  - ⋆ $u_n = x^n$ avec $x \neq 1$, $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$
  - ⋆ Pour $x = 1/2$, $S_n = 2 - 2^{-n}$, pour $x = 2$, $S_n = 2^{n+1} - 1$.
- Étude de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$
  - ⋆ On peut souvent dire si (S_n) est convergente ou pas : cv pour $x = 1/2$, dv $x = 2$
  - ⋆ Calcul de la limite difficile en général !

1. Définitions et Exemples.

- Notation : si (u_n) est une suite dans $\mathbf{K}$, on note

$$S_0 = u_0, \qquad \forall n \geq 1, \quad S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Définition. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbf{K}$. $S_n = u_0 + \ldots + u_n$.

1. Si la suite de t.g. S_n est convergente, on dit que *la série de t.g. u_n est convergente* ou encore que *la série $\sum u_n$ converge.*
2. Si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente, on dit que *la série de t.g. u_n est divergente* ou que *la série $\sum u_n$ diverge.*

- S_n = somme partielle de la série $\sum u_n$
  - ⋆ $u_n = 2^{-n}$, $S_n = 2 - 2^{-n}$!
- Si la série $\sum u_n$ est convergente, la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ s'appelle la *somme de la série* $\sum u_n$ et se note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \qquad \text{ou encore,} \qquad \sum_{n\geq 0} u_n$$

* $\star$ $u_n = 2^{-n}$, $S_n = 2 - 2^{-n}$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$ soit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} = 2.$$

* Étudier la nature de la série $\sum u_n$ c'est dire si cette série est convergente ou divergente

Remarque. 1. Si la suite (u_n) est définie seulement pour $n \geq n_0$, on peut considérer la série $\sum u_n$; les sommes partielles sont alors

$$S_n = u_{n_0} + \ldots + u_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

Si ces sommes partielles convergent, la limite est $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k\geq n_0} u_k$

* $u_n = 2^{-n}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = 1 - 2^{-n}$.

2. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. On a, pour $n \geq n_0$,

$$S_n = u_0 + \ldots + u_{n_0} + u_{n_0+1} + \ldots + u_n$$

(S_n) est cv ssi $(S_n - S_{n_0})$ est cv.

La nature d'une série ne dépend pas des premiers termes de la suite ! Par contre, la valeur de la somme si !

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = \lim_{n\to\infty} \Big(2 - 2^{-n}\Big) = 2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - 2^{-n}\Big) = 1.$$

3. Lorsque $\sum u_n$ est cv, notons S la limite de (S_n) i.e. $S = \sum_{n\geq 0} u_n$. Pour $n \geq 0$, le reste d'ordre n est

$$R_n = S - S_n = \sum_{k>n} u_k \longrightarrow 0, \quad \text{si } n \to \infty.$$

Proposition. *Si $\sum u_n$ converge, alors* $\lim u_n = 0$.

* En effet, $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Définition. Lorsque (u_n) ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente (GDV).

Remarque. Attention, la réciproque est fausse ! ! ! On peut avoir $\lim u_n = 0$ et $\sum u_n$ divergente.

Exemples fondamentaux.

1. *Série géométrique.* Soit $z \in \mathbf{C}$. On étudie $\sum z^n$, $u_n = z^n$.

$$S_n = 1 + z + \ldots + z^n = \begin{cases} n+1, & \text{si } z = 1, \\ \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, & \text{si } z \neq 1. \end{cases}$$

   - Si $|z| \geq 1$, $|u_n| = |z^n| = |z|^n \geq 1$. La série est GDV !
   - Si $|z| < 1$, $z^{n+1} \to 0$ et
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$
   - Plus généralement, pour $|z| < 1$ et $l \in \mathbf{N}$,
$$\sum_{n=l}^{+\infty} z^n = \frac{z^l}{1-z}.$$

2. *Série harmonique.* Pour $n \geq 1$, $u_n = 1/n$. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$ et pourtant $\sum \frac{1}{n}$ diverge !

   - Puisque $\ln(1+x) \leq x$, $\frac{1}{k} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$ et $H_n \geq \ln(n+1)$.
   - On peut aussi remarquer que
$$H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
   Si $\sum n^{-1}$ convergeait, on aurait $\lim\left(H_{2n} - H_n\right) = 0$! !

Proposition. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbf{K}$. On note, pour $n \geq 0$, $u_n = a_n - a_{n+1}$. La série $\sum u_n$ est convergente ssi (a_n) est convergente et dans ce cas*

$$\sum_{n\geq 0} u_n = a_0 - \lim a_n.$$

- En effet,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{n+1}.$$

Exemple. 1. $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ cv : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

2. $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$

2. Opérations sur les séries.

Proposition. 1. *Si les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *cv, alors* $\sum(u_n+v_n)$ *cv et*

$$\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)=\sum_{n\geq 0}u_n+\sum_{n\geq 0}v_n.$$

2. *Si* $\sum u_n$ *cv, alors, pour tout* $\lambda\in\mathbf{K}$, $\sum(\lambda u_n)$ *cv et*

$$\sum_{n\geq 0}(\lambda u_n)=\lambda\sum_{n\geq 0}u_n$$

Corollaire. *Soit* $\lambda\neq 0$. *Les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum(\lambda u_n)$ *ont même nature.*

Remarque. 1. La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente

2. On ne peut rien dire pour la somme de deux séries divergentes :
   (a) $u_n=v_n=1/n$, $\sum(u_n+v_n)$ diverge
   (b) $u_n=1/n$, $v_n=-1/(n+1)$, $u_n+v_n=1/(n(n+1))$, $\sum(u_n+v_n)$ converge

Proposition. *Soit* (u_n) *une suite complexe ;* $u_n=a_n+\imath b_n$.
$\sum u_n$ *cv ssi* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *cv et dans ce cas*

$$\sum_{n\geq 0}u_n=\sum_{n\geq 0}a_n+\imath\sum_{n\geq 0}b_n,\qquad \mathrm{Re}\left(\sum_{n\geq 0}u_n\right)=\sum_{n\geq 0}\mathrm{Re}(u_n),\quad \mathrm{Im}\left(\sum_{n\geq 0}u_n\right)=\sum_{n\geq 0}\mathrm{Im}(u_n).$$

3. Convergence absolue.

Définition. Soit $\sum u_n$ une série dans $\mathbf{K}$. Si la série $\sum|u_n|$ est convergente, on dit que la série de t.g. u_n est absolument convergente (ACV).

Théorème. *Une série absolument convergente est convergente et* $|\sum u_n|\leq\sum|u_n|$

Exemple. La série de t.g. $u_n=\dfrac{e^{in\theta}}{n(n+1)}$ est cv pour tout $\theta\in\mathbf{R}$ et

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{n(n+1)}\right|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

- Attention : la réciproque est fausse.

  $\star$ *Série harmonique alternée.* $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$.

Définition. Si la série $\sum u_n$ est convergente et la série $\sum|u_n|$ divergente, on dit que la série de t.g. u_n est semi-convergente (SCV).

- La série harmonique alternée est SCV.

Remarque. Si $\sum |u_n|$ est GDV, $\sum u_n$ est aussi GDV !

Preuve du théorème. • On montre que le suite (S_n) est de Cauchy

- Puisque $\sum |u_n|$ est cv, $T_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$ est de Cauchy.
- Soit $\varepsilon > 0$, il existe $p \geq 0$ tel que $|T_n - T_m| < \varepsilon$ dès que $p \leq n \leq m$.
- D'après l'inégalité triangulaire, si $p \leq n \leq m$,

$$|S_n - S_m| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_m| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_m| = |T_n - T_m| < \varepsilon.$$

- On suppose que $\sum |u_n|$ cv.
- Pour l'inégalité, on envoie $n \to \infty$, dans l'inégalité

$$|S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq |T_n| = \sum_{k=0}^{n} |u_k|.$$

□