Séries à termes positifs

- Dans ce chapitre, $u_n \geq 0$, pour tout n, et on étudie $\sum u_n$.
- On a $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$: (S_n) est croissante !

1. Généralités.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs.*
$\sum u_n$ converge ssi les sommes partielles sont majorées i.e il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \ldots + u_n \leq K$$

- Si $u_n \geq 0$ et $\sum u_n$ diverge on a $S_n \to +\infty$: on écrit parfois $\sum_{n\geq 0} u_n = +\infty$.

Théorème (Comparaison)**.** *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que, pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq v_n$.*

1. *Si $\sum v_n$ cv, alors $\sum u_n$ cv et $0 \leq \sum_{n\geq 0} u_n \leq \sum_{n\geq 0} v_n$.*
2. *Si $\sum u_n$ dv, alors $\sum v_n$ dv.*

Remarque. Il suffit d'avoir l'inégalité $0 \leq u_n \leq v_n$ vérifiée pour tout $n \geq n_0$, pour obtenir la conclusion du théorème.

Démonstration. On a $S_n = \sum_{0\leq k\leq n} u_k \leq T_n = \sum_{0\leq k\leq n} v_k$

- Si (T_n) est majorée, il en va de même de (S_n)
- Si (S_n) n'est pas majorée, (T_n) ne l'est pas non plus

$\square$

2012/2013 : fin du cours 3

Remarque. Retour sur ACV implique CV

- Cas u_n réel. Notons $v_n = |u_n| - u_n$. D'après l'inégalité triangulaire, $v_n = |v_n| \leq 2|u_n|$. $\sum v_n$ cv. Comme $u_n = |u_n| - v_n$, $\sum u_n$ est convergente.
- Cas $u_n \in \mathbf{C}$: $u_n = a_n + \imath b_n$. On a $|a_n| \leq |u_n|$ et $|b_n| \leq |u_n|$. $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont ACV. Pas fait

Corollaire. *Soient (u_n) à termes positifs et (v_n) à termes strictement positifs.*

1. *Si* $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = l > 0$ *alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont même nature.*

2. *Si* $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ *et* $\sum v_n$ *cv alors* $\sum u_n$ *cv.*

Démonstration. 1. Il existe n_0 tq, pour $n \geq n_0$, $\left|\dfrac{u_n}{v_n} - l\right| \leq \dfrac{l}{2}$ soit $u_n \dfrac{l}{2} \leq v_n \leq u_n \dfrac{3l}{2}$.

2. Il exite n_0 tq, pour $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$.

$\square$

- Bien penser aux équivalents pour les séries à termes positifs !

Exemple. 1. $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$: $\sum v_n$ cv donc $\sum u_n$ cv.

2. $u_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$: $\sum v_n$ dv donc $\sum u_n$ dv

3. $u_n = \frac{1}{n^3}$, $v_n = \frac{1}{n^2}$. On vient de voir que $\sum v_n$ cv ; par suite, $\sum u_n$ cv

2. Comparaison à une série géométrique.

Théorème (Règle de d'Alembert). *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que* $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

1. *Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge ;*

2. *si $l > 1$, la série $\sum u_n$ est GDV*

- Si $l = 1$ on ne peut rien dire !
  - $\star$ $u_n = 1/n$: $\sum u_n$ dv
  - $\star$ $u_n = 1/n^2$: $\sum u_n$ cv

Démonstration. On écrit, pour $n \geq n_0$,

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \ldots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times u_{n_0}.$$

- Dans le premier cas, il existe n_0 et $k < 1$ tels que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k, \qquad \text{et} \qquad u_n \leq k^{n-n_0} u_{n_0}.$$

- Dans le second cas, il existe n_0 et $k > 1$ tels que, pour $n \geq n_0$, $u_{n+1}/u_n \geq k$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k, \qquad \text{et} \qquad u_n \geq k^{n-n_0} u_{n_0} \geq u_{n-0} > 0.$$

□

Exemple. Étude de la série de t.g. $u_n = n^2 x^n$.

- Si $x = 0$, $u_n = 0$! Rien à faire !
- Pour $x \neq 0$, Il ne s'agit pas nécessairement d'une série à termes positifs. On regarde l'ACV : on a $\lim \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |x|$; d'après la règle de d'Alembert
  - ⋆ Si $|x| < 1$, la série $\sum u_n$ est ACV
  - ⋆ Si $|x| > 1$, $\sum |u_n|$ est GDV donc $\sum u_n$ est aussi GDV
  - ⋆ Si $|x| = 1$, on ne peut pas conclure. Mais $|u_n| = n^2 \to \infty$ donc $\sum u_n$ est GDV

Théorème (Règle de Cauchy)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs ou nuls. On suppose que* $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$.

1. *Si $l < 1$, $\sum u_n$ est convergente*
2. *Si $l > 1$, $\sum u_n$ est GDV*

- Rappel, si $u_n > 0$, $\sqrt[n]{u_n} = u_n^{1/n} = e^{\ln(u_n)/n}$.

Démonstration. 1. Il existe n_0 et $k < 1$ t.q. pour $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \leq k$ soit $u_n \leq k^n$.

2. Il existe n_0 et $k > 1$ t.q. pour $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \geq k$ soit $u_n \geq k^n \longrightarrow +\infty$.

□

- On utilise cette règle quand u_n comporte des puissances n-ièmes.

Exemple. Étude de la série de t.g. $u_n = x^n/n^n$. Ce n'est pas une série à termes positifs, on étudie d'abord l'ACV. On a $\sqrt[n]{u_n} = |x|/n \longrightarrow 0$. D'après le critère de Cauchy, la série $\sum u_n$ est ACV.

3. Comparaison à une série de Riemann.

Définition. Soit α un réel. La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ s'appelle la série de Riemann.

Théorème. *La série de tg $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha > 1$.*

Démonstration. • Si $\alpha \leq 0$, $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 : la série est GDV

- Si $0 < \alpha \leq 1$. Pour tout $n \geq 1$,

$$n = n^\alpha \times n^{1-\alpha} \geq n^\alpha, \qquad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

  Nous avons vu que $\sum \dfrac{1}{n}$ dv il en va de même de $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$

- Soit $\alpha > 1$. Considérons la fonction $f(x) = -\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ définie sur $]0, +\infty[$. L'égalité des AF donne, pour tout $n \geq 2$, l'existence d'un c tel que $n-1 < c < n$ et

$$f(n) - f(n-1) = \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n)^{\alpha-1}} = (n-(n-1))f'(c) = \frac{\alpha-1}{c^\alpha} \geq \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$$

  ⋆ Puisque $\alpha - 1 > 0$, $\lim \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} = 0$, la série télescopique de t.g. $\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ converge.

  ⋆ Il en va de même de la série de t.g. $\dfrac{\alpha-1}{n^\alpha}$

  ⋆ Par conséquent la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est cv si $\alpha > 1$.

□

- **Il faut connaître le résultat sur les séries de Riemann par cœur !!**

Critère de Riemann. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs ou nuls et soit $\alpha \geq 0$.

1. Si $\lim n^\alpha u_n = l > 0$, $\sum u_n$ cv ssi $\alpha > 1$.
2. Si $\alpha > 1$ et $\lim n^\alpha u_n = 0$, $\sum u_n$ cv.
3. Si $\lim n u_n = +\infty$, $\sum u_n$ est divergente.

`2012/2013 : fin du cours 4`

Démonstration. • Csq du théorème de comparaison !

  ⋆ Cas 1 : $\sum u_n$ et $\sum n^{-\alpha}$ ont même nature
  ⋆ Cas 2 : pour $n \geq n_0$, $u_n \leq n^{-\alpha}$.
  ⋆ Cas 3 : pour $n \geq n_0$, $u_n \geq n^{-1}$.

□

Exemple. 1. Étude de la série de t.g. $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

- $n^2 u_n = \frac{e^{2\ln n}}{e^{\ln n \ln(\ln n)}} = e^{\ln n(2-\ln(\ln n))} \longrightarrow 0$;
- $\sum u_n$ est convergente puisque $2 > 1$

2. Série harmonique alternée — On étudie la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. On a, pour tout $n \geq 1$,

$$S_{2n} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{2k(2k-1)}.$$

Puisque $\dfrac{n^2}{2n(2n-1)} \longrightarrow \dfrac{1}{4}$, le critère de Riemann montre que S_{2n} converge vers $l \in \mathbf{R}$.
D'autre part, nous avons, pour $n \geq 1$,

$$S_{2n+1} = S_{2n} - \frac{1}{2n+1} \longrightarrow l$$

Comme (S_{2n}) et (S_{2n+1}) converge vers l, $\lim S_n = l$. La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente. Comme d'autre part, $\sum \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \dfrac{1}{n}$ est divergente, la série harmonique alternée est une série semi-convergente. On verra que la valeur de la somme est $-\ln(2)$.

4. Comparaison à une intégrale.

- Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction positive et décroissante.
- Pour $n \geq n_0$, on note

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k), \qquad F_n = \int_{n_0}^{n} f(t)\, dt.$$

  ⋆ $(S_n)_{n \geq n_0}$ et $(F_n)_{n \geq n_0}$ sont croissantes et positives.

- Soit $k \geq n_0$. Puisque f est décroissante,

$$\forall t \in [k, k+1], \qquad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k),$$

  et, en intégrant,

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k)\, dt \leq \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq f(k) = \int_k^{k+1} f(k)\, dt$$

- On fait la somme de ces inégalités de $k = n_0$ à $k = n-1$, pour obtenir

$$f(n_0+1) + \ldots + f(n) \leq \int_{n_0}^{n} f(t)\, dt \leq f(n_0) + \ldots + f(n-1),$$

  soit encore, puisque f est positive,

$$S_n - f(n_0) \leq F_n \leq S_n - f(n) \leq S_n$$

- En résumé, pour tout $n \geq n_0$,

$$F_n \leq S_n \leq F_n + f(n_0). \qquad (*)$$

Proposition. *Soient n_0 un entier et $f : [n_0, +\infty[$ positive et décroissante.*
La série $\sum f(n)$ converge ssi la suite $(F_n)_{n \geq n_0}$ converge .

- Comme f est positive, $(F_n)_{n \geq n_0}$ est croissante

- Donc $(F_n)_{n\geq n_0}$ converge ssi elle est majorée !

Démonstration. • (S_n) et (F_n) sont croissantes

- Via (*), (S_n) est majorée ssi (F_n) l'est

$\square$

Exemple. • Montrons que $\sum n^{-\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$.

- $x \longmapsto n^{-\alpha}$ est positive et décroissante sur $[1, +\infty[$ et

$$F_n = \int_1^n t^{-\alpha}\, dt = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right) = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

- Comme $\alpha > 1$, $F_n \longrightarrow \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

Séries de Bertrand. On étudie la série de t.g. $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ pour α et β réels.

- Si $\alpha > 1$, $\gamma = (1+\alpha)/2 > 1$ et $n^\gamma u_n = \dfrac{1}{n^{(\alpha-1)/2}(\ln n)^\beta} \longrightarrow 0$: $\sum u_n$ cv d'après le critère de Riemann
- Si $\alpha < 1$, $n u_n = \dfrac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \longrightarrow +\infty$: $\sum u_n$ dv d'après le critère de Riemann.
- Cas $\alpha = 1$
  - ⋆ $\beta \leq 0$: $u_n \geq \dfrac{1}{n}$ et $\sum u_n$ dv
  - ⋆ $\beta > 0$: la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$. La série $\sum u_n$ a même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$. Or pour tout $x \geq 2$, $t = e^s$,

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{ds}{s^\beta} = \begin{cases} \ln\ln x - \ln\ln 2, & \text{si } \beta = 1, \\ \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}\right), & \text{si } \beta \neq 1 > 0 \end{cases}$$

  - ⋆ $\beta > 0$: F est majorée ssi $\beta > 1$.
- En conclusion,
  1. $\alpha > 1$: $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge pour tout β
  2. $\alpha < 1$: $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge pour tout β
  3. $\alpha = 1$: $\sum \dfrac{1}{n (\ln n)^\beta}$ converge ssi $\beta > 1$