Rappels sur les suites.

Dans toute la suite, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Généralités sur les suites.

Définition. Une *suite à valeurs dans* $\mathbf{K}$ est une application u de $\mathbf{N}$, privé éventuellement d'un nombre fini d'éléments, dans $\mathbf{K}$. Pour tout entier n, le nombre $u(n)$ est noté u_n ; la suite u se note (u_n).

On parle de suite réelle lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, de suite complexe lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Lorsqu'une suite est définie seulement pour $n \geq p$ – par exemple $(1/n^2)$ est définie pour $n \geq 1$ – on peut écrire pour être précis $(u_n)_{n\geq p}$.

Une suite peut être définie de différentes manières :

1. explicitement en fonction de n : la suite de terme général $u_n = \ln(n+1) + e^{-n}$;
2. à l'aide d'une relation de récurrence : par exemple

$$u_0 = 0, \qquad \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}. \tag{1}$$

Il faut dans ce cas s'assurer que la suite est bien définie (ici $u_n \geq 0$ pour tout n). Les relations de récurrence peuvent faire intervenir plus de termes de la suite que dans l'exemple précédent : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.

Remarque. L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$–espace vectoriel.

Définition. Une suite (u_n) à valeurs dans $\mathbf{K}$ est bornée s'il existe un réel positif K tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad |u_n| \leq K.$$

Définition. Une suite **réelle** (u_n) est *majorée* (respectivement *minorée*) s'il existe un réel M (respectivement m) tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leq M \qquad (\text{respectivement } m \leq u_n).$$

Remarque. Une suite réelle (u_n) est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

Exemple. La suite définie par la relation (1) est minorée par 0 et donc minorée par $\sqrt{2}$ à partir de $n = 1$. Montrons par récurrence qu'elle est majorée par 2. $u_0 = 0 \leq 2$; si $u_n \leq 2$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$. Par conséquent cette suite est bornée.

La suite de terme général $v_n = (-1)^n n$ n'est pas bornée puisque $|v_n| = n$.

Définition. Une suite **réelle** (u_n) est *croissante* (respectivement *décroissante*) si, pour tout entier n, $u_{n+1} \geq u_n$ (respectivement $u_{n+1} \leq u_n$).

Elle est *strictement croissante* (respectivement *strictement décroissante*) si, pour tout entier n, $u_{n+1} > u_n$ (respectivement $u_{n+1} < u_n$).

Revenons à l'exemple (1) et montrons que cette suite est croissante. On a, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - \sqrt{u_{n-1} + 2} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{2 + u_n} + \sqrt{2 + u_{n-1}}}.$$

Par conséquent, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le même que celui de $u_n - u_{n-1}$; ceci étant valable pour tout $n \geq 1$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $u_1 - u_0 = \sqrt{2} > 0$: la suite est croissante. On montre facilement que cette suite est strictement croissante.

2. Suites et limites.

Définition. Soient (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbf{K}$ et $l \in \mathbf{K}$.

La suite (u_n) *converge vers* l si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier p tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad n \geq p \quad \Longrightarrow \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$

On note dans ce cas $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ ou $\lim u_n = l$.

(u_n) est *convergente* lorsqu'il existe $l \in \mathbf{K}$ tel que $\lim u_n = l$. Dans le cas contraire, la suite (u_n) est divergente.

Exemple. La suite de terme général $1/n^2$ converge vers 0. En effet, fixons $\varepsilon > 0$; choisissons un entier p tel que $p > \sqrt{1/\varepsilon}$ de sorte que $p^2 > 1/\varepsilon$. Si $n \geq p$, $n^2 \geq p^2 > 1/\varepsilon$ et $|u_n| = u_n < \varepsilon$.

Remarque. 1. Si une suite est convergente alors la limite est unique.

2. Toute suite convergente est bornée.

3. $\lim u_n = l \iff \lim(u_n - l) = 0 \iff \lim |u_n - l| = 0$.

Proposition. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives l et l'.*

Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $(u_n + \lambda v_n)$ converge vers $l + \lambda l'$, $(u_n v_n)$ converge vers ll' et, si $l' \neq 0$, (u_n/v_n) converge vers l/l'.

Remarque. 1. L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbf{K}$ qui sont convergentes est un sous-espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbf{K}$.

2. Si (u_n) converge vers 0 et si (v_n) est bornée alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

3. Une suite complexe (u_n) converge vers l si et seulement si $(\mathrm{Re}(u_n))$ converge vers $\mathrm{Re}(l)$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ converge vers $\mathrm{Im}(l)$

Définition. La suite **réelle** (u_n) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) – on note alors $\lim u_n = +\infty$ (respectivement $\lim u_n = -\infty$) – si, pour tout $A > 0$, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq p$, $u_n > A$ (respectivement $u_n < -A$).

Exemple. Les suites n^2, $\ln n$, e^n tendent vers $+\infty$.

La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée ; elle ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$. Pourtant cette suite est divergente.

3. Existence de limite pour les suites réelles.

Dans ce paragraphe, toutes les suites qui interviennent sont des suites **réelles**.

Théorème. *On suppose que, pour tout* $n \geq p$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.

1. *Si les suites* (u_n) *et* (w_n) *sont convergentes de même limite* l, *alors la suite* (v_n) *est convergente de limite* l.
2. *Si* $\lim u_n = +\infty$, *alors* $\lim v_n = +\infty$.
3. *Si* $\lim w_n = -\infty$, *alors* $\lim v_n = -\infty$.
4. *Si* $\lim u_n = l$ *et* $\lim v_n = l'$ *alors* $l \leq l'$.

Exemple. La suite de terme général $u_n = \cos n/n$ converge vers 0. En effet, pour tout $n \geq 1$, $-1 \leq \cos n \leq 1$ donc $-1/n \leq u_n \leq 1/n$. Plus élégant, $0 \leq |u_n| \leq 1/n$.

$u_n = n + \sqrt{n}\cos n$ tend vers $+\infty$ puisque $u_n \geq n - \sqrt{n} = n(1 - 1/\sqrt{n})$.

Proposition. *Soit* (u_n) *une suite croissante. Si* (u_n) *est majorée alors elle est convergente ; si* (u_n) *n'est pas majorée,* $\lim u_n = +\infty$.

Soit (u_n) *une suite décroissante. Si* (u_n) *est minorée alors elle est convergente ; si* (u_n) *n'est pas minorée,* $\lim u_n = -\infty$.

Exemple. La suite définie par la relation (1) est convergente puisque croissante et majorée par 2.

Théorème (Suites adjacentes)**.** *Soient* (u_n) *une suite croissante et* (v_n) *une suite décroissante. Si* $\lim(v_n - u_n) = 0$ *alors les suites* (u_n) *et* (v_n) *sont convergentes vers la même limite.*

Exercice. Montrer que la suite de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

est convergente. On pourra considérer la suite $v_n = u_n + 1/(n\,n!)$.

Définition (Suite de Cauchy)**.** Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy si pour tout réel ε strictement positif, il existe un entier p tel que

$$n \geq p, \quad m \geq p \qquad \Longrightarrow \qquad |u_n - u_m| < \varepsilon.$$

Théorème ($\mathbf{K}$ est complet)**.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite de* $\mathbf{K}$.

$(u_n)_{n\geq 0}$ *est convergente si et seulement si* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est une suite de Cauchy.*

4. Suites récurrentes.

4.1. Suites arithmétiques. (u_n) est arithmétique de raison r si elle vérifie la relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. On a alors, $u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_k + (n-k)r$.

On peut calculer facilement la somme des termes d'une suite arithmétique puisque

$$\forall (k,n) \in \mathbf{N}^2, \qquad u_k + \ldots + u_{k+n} = (n+1)(u_k + u_{k+n})/2 = (n+1)(2u_k + nr)/2.$$

En particulier, $1 + \ldots + n = n(n+1)/2$.

4.2. Suites géométriques. (u_n) est géométrique de raison q si elle vérifie la relation de récurrence : pour tout entier n, $u_{n+1} = q\, u_n$. On a alors $u_n = q^n\, u_0$ et $u_n = q^{n-k}\, u_k$.

L'étude de la convergence se ramène à celle de la suite (q^n) :

1. $|q| < 1$: $\quad \lim q^n = 0$;
2. $|q| > 1$: $\quad (q^n)$ n'est pas bornée car $\lim |q^n| = +\infty$;
3. $|q| = 1$: $\quad (q^n)$ est bornée mais (q^n) est divergente sauf si $q = 1$.

On peut également calculer la somme des termes d'une suite géométrique : si $q \neq 1$, on a

$$\forall (k, n) \in \mathbf{N}^2, \qquad u_k + \ldots + u_{k+n} = u_k\, \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\ ;$$

en particulier, pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$,

$$1 + z + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \longrightarrow \frac{1}{1 - z}, \quad \text{si } n \to +\infty.$$

Exercice. Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que $\lim(u_{n+1}/u_n) = a < 1$. Montrer que $\lim u_n = 0$ puis que la suite de terme général $S_n = u_0 + \ldots + u_n$ est convergente.

4.3. Suites arithmo-géométriques. On étudie la suite définie par u_0 et $u_{n+1} = au_n + b$.

Si $a = 1$, c'est une suite arithmétique, si $b = 0$ c'est une suite géométrique.

Si $a \neq 1$. Soit x la solution de l'équation $x = ax + b$: $x = b/(1 - a)$. Posons $v_n = u_n - x$. On a alors, pour tout $n \geq 1$, $v_{n+1} = av_n$: (v_n) est une suite géométrique. On en déduit que $u_n = x + a^n(u_0 - x)$.

Calcul de la mensualité d'un emprunt. On emprunte un capital de C euros au taux mensuel t sur N mensualités constantes. Notons m cette mensualité et d_n la dette de l'emprunteur après n mensualités. Bien évidemment, $d_0 = C$ et si on veut rembourser le prêt en N mensualités, on doit avoir $d_N = 0$. D'autre part, pour tout n,

$$d_{n+1} = (1 + t)\, d_n - m.$$

Le point fixe est solution de $x = (1 + t)x - m$ soit $x = m/t$. La suite $x_n = d_n - m/t$ est une suite géométrique de raison $(1 + t)$. Par conséquent,

$$\forall n \geq 0, \qquad d_n - \frac{m}{t} = (1 + t)^n \left(d_0 - \frac{m}{t}\right) = (1 + t)^n \left(C - \frac{m}{t}\right).$$

Puisque $d_N = 0$, on obtient

$$\frac{m}{t} + (1 + t)^N \left(C - \frac{m}{t}\right) = 0, \quad \text{soit} \quad m = \frac{Ct(1 + t)^N}{(1 + t)^N - 1}.$$

4.4. D'autres exemples. On cherche à étudier une suite **réelle** définie par u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$ où f est une fonction réelle.

Proposition. *Si (u_n) converge vers l et si f est continue au point l, alors $l = f(l)$.*

Si f est croissante, (u_n) est monotone : (u_n) est croissante si $u_1 - u_0 \geq 0$, décroissante si $u_1 - u_0 \leq 0$.

Si f est décroissante, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.

Exemple. $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, $u_0 = 0$. Nous avons vu que cette suite était croissante, positive et majorée par 2 : elle converge donc vers $0 \leq l \leq 2$. Comme $x \longmapsto \sqrt{2+x}$ est continue sur $[0, 2]$, on a

$$l = \lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2 + u_n} = \sqrt{2 + l}, \qquad \text{soit } l^2 = 2 + l.$$

On a donc $l = 2$ ou $l = -1$. Comme $l \geq 0$, $l = 2$.

Proposition. *Soit f dérivable sur $[a, b]$ avec $f([a, b]) \subset [a, b]$. On suppose qu'il existe un réel k tel que $0 \leq k < 1$ et*

$$\forall x \in [a, b], \qquad |f'(x)| \leq k.$$

Alors f possède un unique point fixe l dans $[a, b]$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha \in [a, b]$, $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, converge vers l.

Exemple. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. L'intervalle $[0, 2]$ est stable pour la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2 + x}$; f est dérivable sur cet intervalle et, pour tout $x \in [0, 2]$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}$. Pour tout $x \in [0, 2]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$. La suite (u_n) converge vers l'unique point fixe de f sur $[0, 2]$ qui est 2.