MATH326 : Mathématiques pour les sciences 3

Seconde Session : Mercredi 22 février 2012 (14h30–16h30).

Les documents sont interdits de même que l'usage de la calculatrice.

Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre !

Exercice 1. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

1. $\sum \dfrac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n}$
2. $\sum \dfrac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$
3. $\sum \dfrac{\cos(n^3)}{n^4 + e^{-n}}$
4. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$
5. $\sum \dfrac{(2n)!}{n!\,(2n)^n}$
6. $\sum e^{-\sqrt{n}}$

Exercice 2.

1. Donner le rayon de convergence des séries entières

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} z^n$ sans justification ;

   (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n z^{n-1}$ avec justification.

2. Donner la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n 3^{-n}$.

Exercice 3. On considère, pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$, $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n(x)$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

   Pour $x > 0$, on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Soit $a > 0$. Montrer que S est dérivable sur $[a, +\infty[$ et calculer, pour $x \geqslant a$, la valeur de la somme $S'(x)$. En déduire que S est dérivable sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $0 \leqslant S(x) \leqslant -S'(x)$.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$. En déduire que, pour tout $x > 0$, $S(x) = -\ln(1 - e^{-x})$.
5. (a) Calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{S(x)}{|\ln x|}$.

   (b) La série de fonctions $\sum \dfrac{u_n(x)}{|\ln x|}$ est-elle uniformément convergente sur $]0, 1/2]$?

Tournez S.V.P.

Exercice 4. On considère la fonction $2\pi-$périodique définie par $f(t) = 1$ si $t \in [0, \pi[$ et $f(t) = 0$ si $t \in [\pi, 2\pi[$.

1. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 4\pi[$.
2. Calculer les coefficients trigonométriques de la série de Fourier de f.
3. Pour $t \in \mathbf{R}$, on note $S(f)(t)$ la somme de la série de Fourier de f au point t.
   (a) Donner la valeur de $S(f)(0)$, $S(f)\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $S(f)\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.
   (b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.
4. Déterminer la valeur de la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.
5. La série de Fourier de f converge-t-elle uniformément sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$?

Fin de l'épreuve