MATH326 : Mathématique pour les sciences 3

Fiche n° 3 — Intégrales Généralisées

Exercice 1. Déterminer la nature des intégrales suivantes et, lorsqu'elles convergent, les calculer :

i) $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$;

ii) $I_2 = \int_0^{\pi/2} \tan(x)\,dx$;

iii) $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$;

iv) $I_4 = \int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx$;

v) $I_5 = \int_0^1 \ln x\,dx$;

vi) $I_6 = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$;

vii) $I_7 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$;

viii) $I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$.

Exercice 2. Déterminer la nature des intégrales suivantes

i) $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\cos(t^2)}{e^t - 1}\,dt$;

ii) $I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\ln x \sin x}dx$;

iii) $I_3 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos x\,dx$;

iv) $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$;

v) $I_5 = \int_0^1 \frac{1}{\ln(1+x+\sqrt{x})}\,dx$.

Exercice 3. Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence et l'absolue convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^\alpha}\,dx$.

Exercice 4. Soit $p > 0$.

1) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin t\,dt$ est convergente et calculer sa valeur. Indication : $\sin t$ est la partie imaginaire de e^{it}.

2) Soit $u : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, T–périodique. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-pt}u(t)\,dt$ converge et calculer sa valeur en fonction de $\int_0^T e^{-pt}u(t)\,dt$.

Exercice 5. Montrer que les intégrales $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$ et $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,dx$ sont convergentes et calculer leur valeur.