MATH326 : Mathématique pour les sciences 3

Fiche n° 2 — Séries Numériques

Exercice 1. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n+1},\quad \sum_{n\geq 0}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right),\quad \sum_{n\geq 0}\left[(-1/4)^n+(3/4)^n\right],\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}},$$
$$\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(1+1/n)}{n},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n2^n},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\ln(1+n)}{n^3},\quad \sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\alpha}\right),\quad \text{et}\quad \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+\alpha^n},\quad \text{avec } \alpha>0.$$

Exercice 2. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2n}{3n+2}\right)^n,\quad \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^n},\quad \sum_{n\geq 0}\frac{n!}{n^n},\quad \sum_{n\geq 0}\frac{(n!)^2}{(2n)!},$$
$$\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)2^n}{n!},\quad \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{n^{2n}},\quad \text{et}\quad \sum_{n\geq 0}\frac{n^n}{(n!)^2}.$$

Exercice 3. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum 4^{-\sqrt{n}},\quad \sum \frac{1}{n^{3/4}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right),\quad \sum\left(1-\cos\left(n^{-2/3}\right)\right),\quad \sum\frac{n^3}{3^{n^{1/4}}},$$
$$\sum \ln\left(\frac{n^4+n+1}{n^4+n-1}\right),\quad \text{et}\quad \sum\frac{(-1)^n+n}{n^2+1}.$$

Exercice 4. Calculer les sommes des séries numériques suivantes après avoir montré qu'elles convergent :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+2)},\quad \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n^2-1},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)},\quad \sum_{n\geq 1}na^n\quad \text{et}\quad \sum_{n\geq 1}\frac{a^n}{n}\quad \text{avec}\quad a\in[0,1[.$$

Exercice 5. On considère la série $\sum u_n$ dont le terme général est défini par $u_{2p}=(\frac{1}{3})^p$ et $u_{2p+1}=4(\frac{1}{3})^p$ pour tout $p\in\mathbf{N}$. Appliquer la règle de d'Alembert, puis la règle de Cauchy. En déduire la nature de la série.

Exercice 6. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{2n}{4n^2-3},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\sin(\sqrt{n})}{n\sqrt{n}},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n-\ln n},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\cos n+(-1)^n n^2}{n^3}\quad \text{et}\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{n}.$$

Exercice 7. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n},\quad \sum_{n\geq 2}\frac{1}{\sqrt[3]{n}\ln n},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\quad \text{et}\quad \sum_{n\geq 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 8 (CC1, 2011/2012)**.** Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(n+3)(n+4)}$ est convergente puis calculer la somme de la série $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 9 (CC1, 2011/2012)**.** Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

i) $\displaystyle\sum \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n}$
iii) $\displaystyle\sum \frac{\cos(n^3)}{n^4 + e^{-n}}$
v) $\displaystyle\sum \frac{(2n)!}{n!\,(2n)^n}$

ii) $\displaystyle\sum \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$
iv) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n \ln n}$
vi) $\displaystyle\sum e^{-\sqrt{n}}$

Exercice 10 (CC1, 2011/2012)**.** Soit (u_n) le terme général d'une série à termes positifs.

1) Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{1 + n^2 u_n}$ converge.

2) Le but est de montrer que les séries de terme général u_n et $w_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$ sont de même nature.

   a) On suppose $\sum u_n$ convergente. Montrer que $\sum w_n$ converge.

   b) Montrer que si $\sum w_n$ converge, il en va de même de $\sum u_n$.