

MATH504 : Correction rapide du partiel 2008/2009.

Exercice 1. Les tirages d'une semaine sur l'autre étant indépendants, la probabilité d'avoir gagné au moins une fois au bout de k semaines est égale à

$$P = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k ;$$

il reste à prendre $k = n$ dans la formule précédente.

Exercice 2. Notons S l'événement « le cours est su », F « l'étudiant est une fille », G « l'étudiant est un garçon ».

1. En l'absence d'étudiant hermaphrodite,

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S \cap F) + \mathbb{P}(S \cap G) = \mathbb{P}(S | F) \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(S | G) \mathbb{P}(G) = 0,5 \times 0,75 + 0,4 \times 0,25 = \frac{19}{40}.$$

2. On a

$$\mathbb{P}(F | S) = \frac{\mathbb{P}(F \cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(S | F) \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}}{\frac{19}{40}} = \frac{15}{19}.$$

Exercice 3. On a tout d'abord pour tout réel t , comme F_X est continue sur \mathbf{R} ,

$$\mathbb{P}(\{Y \leq t\}) = \mathbb{P}(\{-X \leq t\}) = \mathbb{P}(\{X \geq -t\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X < -t\}) = 1 - F_X((-t)-) = 1 - F_X(-t).$$

Il s'en suit immédiatement que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mathbb{P}(\{Y \leq t\}) = F_X(t) = \mathbb{P}(\{X \leq t\}).$$

Y et X ont même loi, la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Si $t < 0$, trivialement $\mathbb{P}(\{Z \leq t\}) = 0$ et pour $t \geq 0$, on a, comme F_X est continue sur \mathbf{R} ,

$$\mathbb{P}(\{Z \leq t\}) = \mathbb{P}(\{|X| \leq t\}) = \mathbb{P}(\{-t \leq X \leq t\}) = F_X(t) - F_X((-t)-) = F_X(t) - F_X(-t).$$

On obtient finalement, $F_Z(t) = 0$ pour $t < 0$ et $F_Z(t) = \min(t, 1)$ pour $t \geq 0$. Z suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 4. 1. La densité de X étant nulle sur l'intervalle $] -\infty, 0[$, on a $\mathbb{P}(\{X < 0\}) = 0$. Par suite, pour tout $t < 0$, $\mathbb{P}(\{X \leq t\}) = 0$. Si $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\{X \leq t\}) = \int_{-\infty}^t p(x) dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

2. Puisque $\mathbb{P}(\{X < 0\}) = 0$, avec probabilité 1, X est positive et $Y = 1 + [X]$ est un entier strictement positif : Y est à valeurs dans \mathbf{N}^* . Pour tout entier $k > 0$,

$$\mathbb{P}(\{Y = k\}) = \mathbb{P}(\{1 + [X] = k\}) = \mathbb{P}(\{k-1 \leq X < k\}) = F_X(k-) - F_X((k-1)-),$$

et puisque F_X est continue, notant $p = 1 - e^{-\lambda}$,

$$\mathbb{P}(\{Y = k\}) = F_X(k) - F_X(k-1) = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = e^{-\lambda(k-1)} (1 - e^{-\lambda}) = p(1-p)^{k-1}.$$

Y suit la loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$.

Exercice 5. Notons, pour $i = 1, \dots, 6$, C_i la couleur de la i^{e} boule tirée. On a

$$\mathbb{P}(\{X = 1\}) = \mathbb{P}(C_1 = R) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}(\{X = 2\}) = \mathbb{P}(C_2 = R, C_1 = N) = \mathbb{P}(C_2 = R | C_1 = N) \mathbb{P}(C_1 = N) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{10},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X = 3\}) &= \mathbb{P}(C_3 = R, C_2 = N, C_1 = N) = \mathbb{P}(C_3 = R | C_2 = N, C_1 = N) \mathbb{P}(C_2 = N, C_1 = N) \\ &= \frac{3}{4} \mathbb{P}(C_2 = N | C_1 = N) \mathbb{P}(C_1 = N) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(\{X = 4\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X = 1\}) - \mathbb{P}(\{X = 2\}) - \mathbb{P}(\{X = 3\}) = \frac{1}{20}.$$