

## MATH504 : Correction rapide de l'examen 2010/2011.

**Exercice 1.** 1. On a, pour tout  $0 < s < 1$ ,

$$\mathbb{E}[s^X] = \sum_{k \geq 0} s^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}.$$

2. (a) Puisque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,

$$G_{X+Y}(s) = \mathbb{E}[s^X s^Y] = \mathbb{E}[s^X] \mathbb{E}[s^Y] = G_X(s) G_Y(s) = e^{\lambda(s-1)} e^{\mu(s-1)} = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}.$$

(b) C'est la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre  $\lambda + \mu$ .

3. (a) Soit  $k$  et  $n$  deux entiers. Puisque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes

$$\mathbb{P}(X = k | X + Y = n) = \frac{\mathbb{P}(X = k, X + Y = n)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} = \frac{\mathbb{P}(X = k, Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} = \frac{\mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)}.$$

Si  $k > n$ ,  $\mathbb{P}(Y = n - k) = 0$  et  $\mathbb{P}(X = k | X + Y = n) = 0$ . Si  $k \leq n$ , comme  $X + Y$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda + \mu$ ,

$$\mathbb{P}(X = k | X + Y = n) = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \frac{\lambda^k}{(\lambda+\mu)^k} \frac{\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^{n-k}} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.$$

(b) D'après le calcul précédent, conditionnellement à l'événement  $\{X + Y = n\}$ ,  $X$  suit la loi binomiale de paramètre  $n$  et  $\lambda/(\lambda + \mu)$ .

**Exercice 2.** 1. (a) Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue et bornée. On a

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{1+u}{1-u}\right) \frac{1}{2} \mathbf{1}_{]-1,1[}(u) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{1+u}{1-u}\right) du,$$

et, le changement de variable  $x = (1+u)/(1-u)$ ,  $u = (x-1)/(x+1) = 1 - 2/(x+1)$ ,  $du = 2dx/(x+1)^2$  donne

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_0^{+\infty} f(x) \frac{dx}{(x+1)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{(x+1)^2} \mathbf{1}_{x \geq 0} dx.$$

$X$  a pour densité  $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2} \mathbf{1}_{x \geq 0}$ .

(b) Par définition, pour tout réel  $t$ ,

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{(x+1)^2} \mathbf{1}_{x \geq 0} dx.$$

Si  $t < 0$ ,  $F_X(t) = 0$  et, pour  $t \geq 0$ ,

$$F_X(t) = \int_0^t \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[ \frac{-1}{1+x} \right]_0^t = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{t+1}.$$

(c) Bien évidemment  $Y = \max(3, X) \geq 3$ . Donc, pour  $t < 3$ ,  $\mathbb{P}(Y \leq t) = 0$ . Pour tout  $t \geq 3$ ,

$$\mathbb{P}(\max(3, X) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \frac{t}{t+1}.$$

Finalement,  $F_Y(t) = \frac{t}{t+1} \mathbf{1}_{t \geq 3}$ .

2.  $X$  est positive puisque sa densité est nulle sur  $\mathbf{R}_-$  :  $Z$  est à valeurs dans  $\mathbf{N}$ . Pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , puisque  $F_X$  est continue,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}([X] = k) = \mathbb{P}(k \leq X < k+1) = F_X((k+1)-) - F_X(k-) = F_X(k+1) - F_X(k) \\ &= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}. \end{aligned}$$

**Exercice 3.** 1.  $S_n$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = 1/4$ .

2. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0,24 < F_n < 0,26) &= \mathbb{P}(-0,01 < F_n - 0,25 < 0,01) \\ &= \mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}[F_n]| < 0,01) = 1 - \mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}[F_n]| \geq 0,01), \end{aligned}$$

et, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, comme  $\mathbb{V}[S_n] = 3n/16$ ,

$$\mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}[F_n]| \geq 0,01) \leq \frac{\mathbb{V}[F_n]}{(0,01)^2} = 10^4 \frac{\mathbb{V}[S_n]}{n^2} = 10^4 \frac{3}{16n}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(0,24 < F_n < 0,26) \geq 1 - \frac{3 \cdot 10^4}{16n}.$$

Pour  $n = 10\,000 = 10^4$ , on obtient,  $\mathbb{P}(0,24 < F_n < 0,26) \geq \frac{13}{16}$ .

3. On cherche  $n$  tel que  $1 - \frac{3 \cdot 10^4}{16n} \geq 0,9$  c'est à dire  $n \geq \frac{300\,000}{16} = 18750$ .

4. (a) On a  $\{0,24 < F_n < 0,26\} \subset A_n = \{0,22 < F_n < 0,26\}$  et par conséquent

$$\mathbb{P}(A_n) \geq \mathbb{P}(0,24 < F_n < 0,26) \geq 1 - \frac{30\,000}{16n}.$$

(b) D'après le TCL, on peut approcher la loi  $\mathcal{B}(n, p)$  par la loi  $\mathcal{N}(np, np(1-p))$  si  $n$  est grand. Par suite, notant  $p = 1/4$ , on peut approcher la loi de

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} (F_n - p)$$

par la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On en déduit que

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(-3 \frac{10^{-2} \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} (F_n - p) < \frac{10^{-2} \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \approx \Phi\left(0,04 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(-0,12 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}}\right).$$

**Exercice 4.** 1.  $N$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .

2. Si  $n$  est grand, on peut approcher la loi de  $N$  par la loi  $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ . Autrement dit, on peut approcher, en loi,  $(N - np)/\sqrt{np(1-p)}$  par une variable aléatoire  $G$  de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

3. Soit  $C$  le nombre d'appels simultanés que supporte le central. On cherche  $C$  de sorte que  $\mathbb{P}(N \leq C) \geq 0,975$ . Or

$$\mathbb{P}(N \leq C) = \mathbb{P}\left(\frac{N - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{C - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Pour trouver  $C$ , on remplace dans cette dernière expression,  $(N - np)/\sqrt{np(1-p)}$  par une variable aléatoire  $G$  de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et on obtient

$$\mathbb{P}\left(\frac{N - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{C - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \simeq \mathbb{P}\left(G \leq \frac{C - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{C - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \geq 0,975 = \Phi(1,96).$$

$\Phi$  étant strictement croissante, on obtient finalement

$$\frac{C - np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq 1,96, \quad C \geq np + 1,96\sqrt{np(1-p)} \approx 119,4.$$

**Exercice 5.** 1. (a) D'après la loi des grands nombres, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k)^2 = \mathbb{E}[(X_1)^2] = 1.$$

(b) Pour tout réel  $t$ ,

$$\varphi_{2+X_1}(t) = \mathbb{E}\left[e^{it(2+X_1)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i2t} e^{itX_1}\right] = e^{i2t} \mathbb{E}\left[e^{itX_1}\right] = e^{i2t} \varphi_{X_1}(t) = e^{i2t} e^{-t^2/2}.$$

C'est la fonction caractéristique de la loi  $\mathcal{N}(2, 1)$ .

(c) Toujours, d'après la loi des grands nombres, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(3(2 + X_k)) &= \mathbb{E}[\sin(3(2 + X_1))] = \mathbb{E}[\operatorname{Im}\left(e^{i3(2+X_1)}\right)] \\ &= \operatorname{Im}\left(\mathbb{E}\left[e^{i3(2+X_1)}\right]\right) = \operatorname{Im}(\varphi_{2+X_1}(3)) = \sin(6) e^{-9/2}. \end{aligned}$$

2. (a) Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . On a, pour tout réel  $t$ , les variables  $(X_n)_{n \geq 1}$  étant indépendantes,

$$\varphi_{Y_n}(t) = \mathbb{E}\left[e^{i \frac{t}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i \frac{t}{\sqrt{n}} X_1} \dots e^{i \frac{t}{\sqrt{n}} X_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i \frac{t}{\sqrt{n}} X_1}\right] \dots \mathbb{E}\left[e^{i \frac{t}{\sqrt{n}} X_n}\right],$$

et comme elles sont également identiquement distribuées

$$\varphi_{Y_n}(t) = \mathbb{E}\left[e^{i \frac{t}{\sqrt{n}} X_1}\right]^n = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(e^{-t^2/(2n)}\right)^n = e^{-t^2/2}.$$

$Y_n$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

(b) Puisque  $N$  est à valeurs dans  $\mathbf{N}^*$ ,  $1 = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{N=n}$  et, pour tout réel  $t$ ,

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}\left[e^{itY}\right] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[e^{itY} \mathbf{1}_{N=n}\right] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[e^{itY_n} \mathbf{1}_{N=n}\right].$$

Comme les variables  $N$  et  $(X_n)_{n \geq 1}$  sont indépendantes, il en va de même de  $N$  et  $Y_n$  pour tout  $n \geq 1$ . Par conséquent,

$$\varphi_Y(t) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[e^{itY_n}\right] \mathbb{E}[\mathbf{1}_{N=n}] = e^{-t^2/2} \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(N = n) = e^{-t^2/2},$$

puisque,  $N$  étant à valeurs dans  $\mathbf{N}^*$ ,  $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(N = n) = 1$ .  $Y$  suit également la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .