

## MATH 504 : Probabilités et statistiques

Deuxième session : durée trois heures.

*Seul le formulaire des lois usuelles est autorisé.*

Mercredi 24 février 2010.

**Exercice 1.** On dispose d'un jeu de 32 cartes et d'un jeu de 52 cartes comportant 4 as chacun. On choisit au hasard un jeu dans lequel on tire une carte (au hasard).

On tire un as. Quelle est la probabilité pour que cet as provienne du jeu de 32 cartes ?

**Exercice 2.** Soit  $U$  une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$\mathbb{P}(U \leq t) = 0 \text{ si } t < 0, \quad \mathbb{P}(U \leq t) = t \text{ si } 0 \leq t < 1, \quad \mathbb{P}(U \leq t) = 1 \text{ si } t \geq 1.$$

1. Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $a > 0$ . On note  $X = aU + b$ .
  - (a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ .
  - (b) Trouver les valeurs de  $a$  et  $b$  pour lesquelles  $X$  suit la loi uniforme sur  $[-1, 1]$ .
2. Trouver la loi de la variable aléatoire  $Y = 1 + [6U]$ ,  $[x]$  désignant la partie entière de  $x$ .
3. Déterminer la densité de la variable aléatoire  $Z = (1 - U)/U$ .

Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

4. Soit  $k$  un entier,  $k \geq 2$ .

(a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire

$$M_k = \max(U_1, U_2, \dots, U_k).$$

(b) La variable aléatoire  $M_k$  possède-t-elle une densité ? Si oui la calculer.

5. (a) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $\cos(\pi U_1)$ . **Rappel :** pour tout réel  $x$ ,  $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ .

(b) Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(\pi U_k).$$

(c) Déterminer la limite en loi de

$$\sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^n \cos(\pi U_k).$$

**Exercice 3.** Une enceinte contient  $n$  particules dont les durées de vie,  $X_i$ , sont indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle de paramètre  $\theta > 0$  :

$$\forall t < 0, \quad \mathbb{P}(X_i \leq t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(X_i \leq t) = 1 - e^{-\theta t}.$$

On note  $N_t$  le nombre de particules qui ne sont pas désintégrées à l'instant  $t \geq 0$  :

$$N_t = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{X_k \geq t}.$$

1. Calculer la probabilité pour qu'une particule donnée ne soit pas encore désintégrée à l'instant  $t \geq 0$ .
2. Préciser la loi ainsi que la moyenne et la variance de  $N_t$ . Étudier  $\mathbb{V}[N_t]$  en fonction de  $t$ .
3. Comment peut-on approcher la loi de  $N_t$  si  $n$  est suffisamment grand ?
4. Soient  $0 < \alpha < 1$  et  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Comment approcher  $\mathbb{P}(N_t > \alpha n)$  à l'aide de  $\Phi$  ?

**Exercice 4.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On note  $G$  la fonction génératrice de  $X_1$  :

$$\forall |z| \leq 1, \quad G(z) = \mathbb{E} \left[ z^{X_1} \right] = e^{\lambda(z-1)}.$$

1. Calculer, pour tout entier  $n \geq 0$ , la fonction génératrice de  $S_n = \sum_{k=0}^n X_{k+2}$  et préciser la loi de  $S_n$ .
2. Exprimer à l'aide de  $G$  la fonction génératrice de la variable aléatoire  $S$  définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = \sum_{k=0}^{X_1(\omega)} X_{k+2}(\omega).$$