

## MATH 504 : Probabilités et statistiques

Examen terminal : durée trois heures.

*Seul le formulaire des lois usuelles est autorisé.*

Mardi 05 janvier 2010.

**Exercice 1.** On dispose de  $N$  urnes numérotées de 1 à  $N$ . Chaque urne contient  $N$  boules ; l'urne n°  $k$  contient  $k$  boules rouges et  $N - k$  boules noires. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule au hasard dans l'urne choisie.

1. Calculer la probabilité que la boule tirée soit de couleur rouge.
2. La boule tirée est de couleur rouge. Calculer alors, pour  $k = 1, \dots, N$ , la probabilité pour que la boule ait été tirée dans l'urne comportant  $k$  boules rouges.

**Exercice 2.** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

1. Trouver la loi de la variable aléatoire  $G = 1 + [X]$ ,  $[x]$  désignant la partie entière de  $x$ .
2. Déterminer la densité de la variable aléatoire  $Y = X^2$ .
3. Soit  $a$  un réel strictement positif.
  - (a) Tracer le graphe de la fonction  $x \mapsto \min(x, a)$ .
  - (b) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Z = \min(X, a)$ .
4. Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-X_k}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(3X_k).$$

**Exercice 3.** La gendarmerie nationale envisage de faire un contrôle de vitesse sur la D14 le mercredi 5 janvier 2010. Elle estime que 5000 véhicules emprunteront cette route ce jour-là et que chaque véhicule dépasse la limite autorisée avec une probabilité  $p = 0,2$ , les comportements des véhicules étant indépendants entre eux.

1. Quelle est la loi du nombre d'infractions ?
2. Comment approcher cette loi en utilisant le théorème limite central ?
3. En utilisant cette approximation, sachant que l'amende minimale est de 45 euros, déterminer le coût  $C$  maximal de ce contrôle, pour que la probabilité que l'opération soit rentable soit supérieure à 90%.

Rappel :  $\Phi(-1, 28) = 0,1$  où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Exercice 4.** 1. Soient  $X$  une variable aléatoire positive et  $a > 0$ . Démontrer l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

2. Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle de paramètre 1 et  $r > 0$ . On note, pour  $n \geq 1$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

(a) Montrer, en utilisant l'inégalité de Markov, que, pour tout  $0 < \lambda < 1$ ,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq 1 + r\right) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda S_n} \geq e^{n\lambda(1+r)}\right) \leq \left(e^{-\lambda(1+r)} \mathbb{E}\left[e^{\lambda X_1}\right]\right)^n.$$

(b) En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq 1 + r\right) \leq (1 + r)^n e^{-nr}.$$

**Exercice 5.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On pose  $S_0 = T_0 = 0$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad T_n = (1 - X_1) + \dots + (1 - X_n) = n - S_n.$$

1. (a) Pour  $n \geq 1$ , préciser la loi des variables aléatoires  $S_n$  et  $T_n$ .

(b) Pour  $n \geq 1$ , calculer  $\mathbb{P}(S_n = 0, T_n = 0)$ .  $S_n$  et  $T_n$  sont-elles indépendantes ?

2. Soit  $N$  une variable aléatoire indépendante des variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 1}$  suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . On pose

$$\forall \omega \in \Omega, \quad U(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega), \quad V(\omega) = T_{N(\omega)}(\omega) = N(\omega) - U(\omega).$$

(a) Justifier l'égalité, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(U = k) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n = k, N = n) = \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(S_n = k, N = n).$$

(b) En déduire que  $U$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda p$ .

(c) Déterminer la loi de  $1 - X_1$  puis, sans aucun calcul, préciser la loi de  $V$ .

(d) Montrer que, pour  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\mathbb{P}(U = k, V = l) = \mathbb{P}(N = k + l) \mathbb{P}(S_{k+l} = k)$ . En déduire que les variables aléatoires  $U$  et  $V$  sont indépendantes.