

MATH504 : Correction rapide du partiel 2009/2010.

Exercice 1. 1. (a) On a, notant N l'événement $\bar{B} = B^c$: « le chocolat est noir »,

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap B) + \mathbb{P}(E \cap N) = \mathbb{P}(E | B) \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(E | N) \mathbb{P}(N) = \frac{1}{2} \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \frac{1}{4} = \frac{11}{24}.$$

(b) La formule de Bayes donne

$$\mathbb{P}(B | E) = \frac{\mathbb{P}(B \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(E | B) \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{9}{11}.$$

2. Nous savons que $\mathbb{P}(B) = 3/4$, $\mathbb{P}(E) = 11/24$. D'autre part,

$$\mathbb{P}(E \cap B) = \mathbb{P}(E | B) \mathbb{P}(B) = \frac{3}{8} \neq \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(E).$$

Les événements B et E ne sont pas indépendants.

E et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(E | B) = \mathbb{P}(E)$ c'est à dire (cf. 1.a.) comme $\mathbb{P}(N) = 1 - \mathbb{P}(B)$

$$\mathbb{P}(E | B) = \mathbb{P}(E | B) \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(E | N) \mathbb{P}(N) \quad \text{soit} \quad \mathbb{P}(E | B)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(E | N)(1 - \mathbb{P}(B)).$$

E et B sont indépendants si la boîte ne contient que des chocolats bruns – $1 - \mathbb{P}(B) = 0$ – ou bien lorsque les proportions de chocolats enveloppés parmi les chocolats bruns et les chocolats noirs sont égales – $\mathbb{P}(E | B) = \mathbb{P}(E | N)$.

Exercice 2. 1. (a) Le graphe de F_X se trouve à la figure 1.

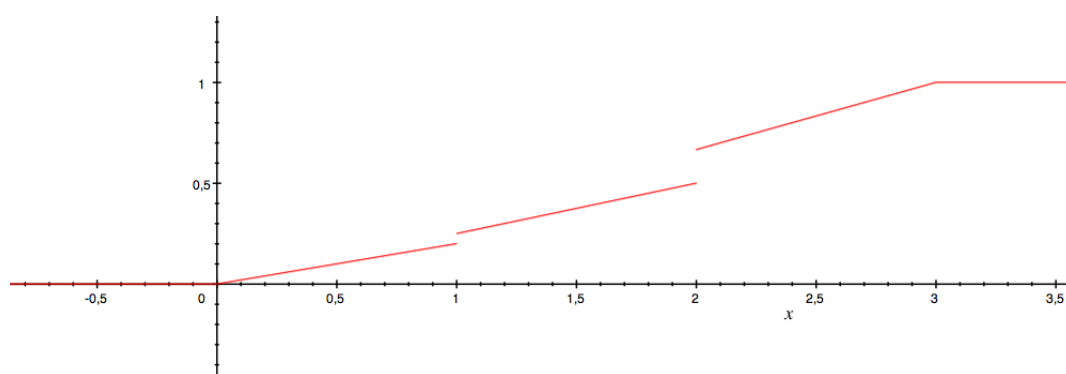


FIGURE 1 – Graphe de la fonction F_X

Par définition de F_X , nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X \leq 1\}) &= F_X(1) = 1/4, & \mathbb{P}(\{1 \leq X \leq 3\}) &= F_X(3) - F_X(1-) = 1 - 1/5 = 4/5, \\ \mathbb{P}(\{X < 2\}) &= F_X(2-) = 1/2, & \mathbb{P}(\{X > 2\}) &= 1 - F_X(2) = 1 - 2/3 = 1/3. \end{aligned}$$

(b) F_X possède deux points de discontinuité $x = 1$ et $x = 2$. Pour tout $x \neq 1$ et $x \neq 2$, $\mathbb{P}(\{X = x\}) = 0$. On a d'autre part

$$\mathbb{P}(\{X = 1\}) = F_X(1) - F_X(1-) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}, \quad \mathbb{P}(\{X = 2\}) = F_X(2) - F_X(2-) = \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1}{6}.$$

(c) F_X n'étant pas continue; X ne possède pas de densité.

2. Pour tout réel t , nous avons cf. figure 2

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\min(X, 2) \leq t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 2 \text{ (la condition est toujours satisfaite),} \\ \mathbb{P}(X \leq t), & \text{si } t < 2. \end{cases}$$

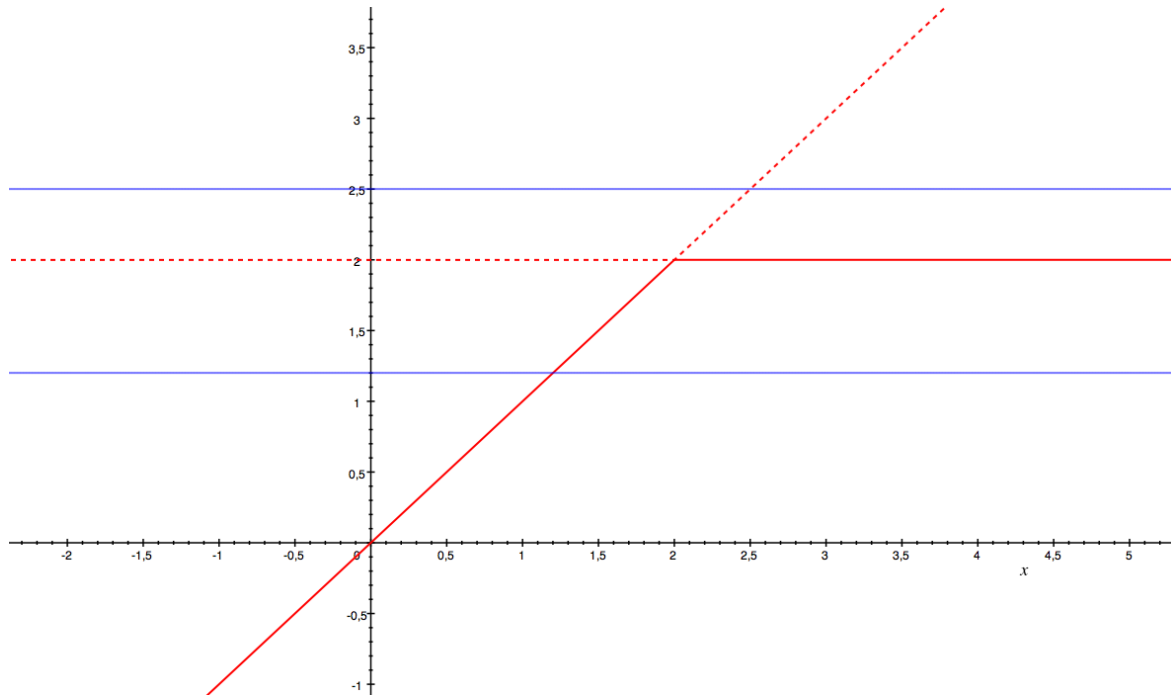


FIGURE 2 – $x \mapsto \min(x, 2)$ en continu, $x \mapsto \max(x, 2)$ en pointillé.

D'autre part, cf. figure 2,

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(\max(X, 2) \leq 2) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 2 \text{ (la condition n'est jamais satisfaite),} \\ \mathbb{P}(X \leq t), & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

Exercice 3. 1. Une densité de probabilité est une fonction positive sur \mathbf{R} dont l'intégrale sur \mathbf{R} vaut 1. Ici p est positive sur \mathbf{R} si et seulement si $a \geq 0$. On a d'autre part, comme p s'annule sur \mathbf{R}_- , en intégrant par partie $u'(x) = e^{-\lambda x}$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx &= a \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = a \left(\left[-x e^{-\lambda x} / \lambda \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \right) \\ &= a \left(0 + \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \right) = \frac{a}{\lambda} \left[-e^{-\lambda x} / \lambda \right]_0^{+\infty} = \frac{a}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

p est donc une densité de probabilité si et seulement si $a = \lambda^2$.

2. Puisque la densité de X s'annule sur \mathbf{R}_- , pour tout $t < 0$, $\mathbb{P}(X \leq t) = 0$. Pour $t \geq 0$, reprenant le calcul précédent, nous avons,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq t) &= \int_{-\infty}^t p(x) dx = \lambda^2 \int_0^t x e^{-\lambda x} dx = \lambda^2 \left(\left[-x e^{-\lambda x} / \lambda \right]_0^t + \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda x} dx \right) \\ &= \lambda^2 \left(-t e^{-\lambda t} / \lambda + \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda x} dx \right) \\ &= \lambda \left(-t e^{-\lambda t} + \left[-e^{-\lambda x} / \lambda \right]_0^t \right) ;\end{aligned}$$

finalement, pour tout réel $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \lambda \left(-t e^{-\lambda t} + \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \right) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}.$$

3. La fonction de répartition de Y est immédiate à déterminer : pour $t \in \mathbf{R}$,

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(2X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t/2) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-\frac{\lambda}{2}t} - \frac{\lambda}{2} t e^{-\frac{\lambda}{2}t}, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 4. 1. Trivialement, $\mathbb{P}(\{S_1 = 6\}) = 5/36$ et $\mathbb{P}(\{S_1 = 7\}) = 6/36 = 1/6$.

2. Puisque Albert et Zoé **jouent à tour de rôle** et qu'Albert commence la partie, $A_{2k} = B_{2k-1} = \emptyset$ pour tout $k \geq 1$.

3. (a) Pour qu'Albert gagne lors du $2k - 1^{\text{e}}$ lancer, il faut qu'il n'ait pas obtenu une somme égale à 6 avant ($S_1 \neq 6, \dots, S_{2k-3} \neq 6$) et que Zoé n'ait pas obtenu la somme des dés égale à 7 avant le $2k - 1^{\text{e}}$ lancer ($S_2 \neq 7, \dots, S_{2k-2} \neq 7$). Par conséquent, pour $k \geq 1$,

$$A_{2k-1} = \{S_1 \neq 6\} \cap \dots \cap \{S_{2(k-1)-1} \neq 6\} \cap \{S_2 \neq 7\} \cap \dots \cap \{S_{2(k-1)} \neq 7\} \cap \{S_{2k-1} = 6\}.$$

De même, pour tout $k \geq 1$,

$$B_{2k} = \{S_1 \neq 6\} \cap \dots \cap \{S_{2k-1} \neq 6\} \cap \{S_2 \neq 7\} \cap \dots \cap \{S_{2(k-1)} \neq 7\} \cap \{S_{2k} = 7\}.$$

(b) Notant $p = \mathbb{P}(S_1 = 6)$ et $q = \mathbb{P}(S_1 = 7)$, on obtient, par indépendance des lancers, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(A_{2k-1}) = (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}p, \quad \mathbb{P}(B_{2k}) = (1-p)^k(1-q)^{k-1}q.$$

4. On a $A = \cup_{k \geq 1} A_{2k-1}$ et $B = \cup_{k \geq 1} B_{2k}$; par disjonction, comme $\sum_{n \geq 1} z^{n-1} = 1/(1-z)$ pour tout $|z| < 1$, on obtient,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{k \geq 1} p [(1-p)(1-q)]^{k-1} = \frac{p}{1 - (1-p)(1-q)}, \\ \mathbb{P}(B) &= \sum_{k \geq 1} q(1-p) [(1-p)(1-q)]^{k-1} = \frac{q(1-p)}{1 - (1-p)(1-q)}.\end{aligned}$$

5. Commençons par remarquer que pour tout entier $k \geq 1$, la partie dure $2k - 1$ coups si Albert gagne au $2k - 1^{\text{e}}$ jet des dés et qu'elle dure $2k$ coups si Zoé gagne au $2k^{\text{e}}$ jet des dés. Par conséquent, $\{T = 2k - 1\} = A_{2k-1}$ et $\{T = 2k\} = B_{2k}$. Il s'en suit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \sum_{k \geq 1} (2k - 1) \mathbb{P}(T = 2k - 1) + \sum_{k=1} 2k \mathbb{P}(T = 2k) = \sum_{k \geq 1} (2k - 1) \mathbb{P}(A_{2k-1}) + \sum_{k=1} 2k \mathbb{P}(B_{2k}) \\ &= p \sum_{k \geq 1} (2k - 1) [(1-p)(1-q)]^{k-1} + q(1-p) \sum_{k \geq 1} 2k [(1-p)(1-q)]^{k-1}.\end{aligned}$$

Puisque $\sum_{n \geq 1} n z^{n-1} = 1/(1-z)^2$ pour $|z| < 1$ et $1 - (1-p)(1-q) = p + q - pq$,

$$\mathbb{E}[T] = \frac{2p}{[1 - (1-p)(1-q)]^2} - \frac{p}{1 - (1-p)(1-q)} + \frac{2q(1-p)}{[1 - (1-p)(1-q)]^2} = \frac{2-p}{1 - (1-p)(1-q)}.$$