

## MATH 504 : Probabilités et statistiques

Deuxième session : durée trois heures.

*Seul le formulaire des lois usuelles est autorisé.*

Mardi 8 mars 2011.

**Exercice 1.** Une classe comporte 15 garçons et 20 filles.  $2/3$  des garçons et  $3/4$  des filles ont les yeux marron, les autres ont les yeux bleus.

1. Calculer la probabilité qu'un étudiant pris au hasard ait les yeux bleus.
2. L'étudiant choisi au hasard a les yeux marron. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?
3. 60% des filles aux yeux bleus sont blondes, les autres sont brunes.  $2/3$  des filles aux yeux marron sont brunes, les autres sont blondes. On choisit une fille au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit blonde ?

**Exercice 2.** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $[1, +\infty[$ , de fonction de densité  $f$  définie par  $f(x) = cx^{-4}\mathbf{1}_{x \geq 1}$ .

1. Déterminer  $c$  et donner la fonction de répartition de  $X$ .
2. Calculer l'espérance de  $X$ .
3. On pose  $Y = \ln(X)$ . Déterminer la loi de  $Y$  et calculer  $\mathbb{E}[Y]$ .

**Exercice 3.** Le TGV Chambéry-Paris de 06h22 contient 750 places assises. La pratique montre que la probabilité qu'une personne ayant acheté un billet ne vienne pas est de 10%. Afin de minimiser le nombre de places inoccupées à bord du train, la SNCF vend plus de billets qu'il n'y a de places disponibles. On note  $n$  le nombre de billets vendus.

1. Préciser la loi, notée  $S$ , du nombre de passagers présents au départ du train.
2. On cherche à déterminer le nombre de billets que doit vendre la SNCF pour avoir une probabilité supérieure à 97.5% de voir son train complet. Montrer que ceci consiste à résoudre l'équation suivante :  $2500 - 3n + 1.96\sqrt{n} \leq 0$ . (On rappelle que  $\mathbb{P}(G \geq -1.96) = 0.975$ , où  $G$  suit une  $\mathcal{N}(0, 1)$ .)
3. Résoudre cette équation.

**Exercice 4.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

1. Déterminer la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  de  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k)^2$ .
2. Montrer que la fonction génératrice de la loi de Poisson est donnée par  $G_{X_1}(z) := \mathbb{E}[z^{X_1}] = e^{\lambda(z-1)}$ .
3. Soit  $(T_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . On note  $Y_n = T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1}$ . Quelle est la loi de  $Y_n$  (sans calcul) ?
4. Déterminer la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  de  $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (T_k)^2$ .
5. Calculer  $G_{T_0}(z) := \mathbb{E}[z^{T_0}]$ . En déduire  $\mathbb{E}[z^{Y_n}]$ .
6. Soit  $N$  une variable aléatoire indépendante des  $(T_n)_{n \geq 0}$  suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . On pose  $U = Y_N$ . Justifier l'égalité

$$\mathbb{E}[z^U] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}[z^{Y_n} \mathbf{1}_{N=n}].$$

7. En déduire que  $U$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda p$ .

**Exercice 5.** On tire successivement avec remise  $n$  cartes d'un jeu de 32 cartes. On note  $X_n$  la variable aléatoire associée au nombre de rois obtenus parmi ces  $n$  cartes.

1. Quelle est la loi de  $X_n$  ?
2. En utilisant l'inégalité de Markov, majorer  $\mathbb{P}(\frac{X_n}{n} \geq \frac{1}{4})$ .
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de  $\mathbb{P}(\frac{X_n}{n} \in [\frac{1}{16}, \frac{3}{16}])$  en fonction de  $n$ . Comment choisir  $n$  pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?
4. Reprendre la question précédente en utilisant le théorème central limite. On rappelle que  $\mathbb{P}(|G| \leq 1.64) = 0.9$ , où  $G$  suit une  $\mathcal{N}(0, 1)$ .