

## MATH 504 : Probabilités et statistiques

Examen terminal : durée trois heures.

*Seul le formulaire des lois usuelles est autorisé.*

Jeudi 06 janvier 2010.

**Exercice 1.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes ;  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ ,  $Y$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\mu > 0$ .

1. Calculer, pour  $0 < s < 1$ ,  $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$ .
2. (a) Calculer, pour  $0 < s < 1$ ,  $G_{X+Y}(s) = \mathbb{E}[s^{X+Y}]$ .  
(b) Préciser la loi de  $X + Y$ .
3. (a) Soit  $k$  et  $n$  deux entiers. Calculer  $\mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n)$ .  
(b) Quelle est la loi de  $X$  conditionnellement à l'évènement  $\{X + Y = n\}$  ?

**Exercice 2.** Soit  $U$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[-1, 1]$  :  $U$  a pour densité

$$u \longmapsto \frac{1}{2} \mathbf{1}_{]-1,1[}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } -1 < u < 1, \\ 0, & \text{si } |u| \geq 1. \end{cases}$$

1. Soit  $X$  la variable aléatoire

$$X = \frac{1+U}{1-U}.$$

- (a) Déterminer la densité de la variable aléatoire  $X$ .  
(b) Calculer la fonction de répartition de  $X$ .  
(c) Déterminer la fonction de répartition de  $Y = \max(3, X)$ .
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Z = [X]$  où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .

**Exercice 3.** Une urne contient 2 boules rouges et 6 boules noires. On tire une boule dans l'urne, on regarde sa couleur puis on la remet dans l'urne et on répète cette opération. On note  $S_n$  le nombre de boules rouges obtenues après  $n$  tirages et  $F_n = S_n/n$ .

1. Préciser la loi de  $S_n$ .
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de la probabilité de l'évènement  $\{0,24 < F_n < 0,26\}$  en fonction de  $n$ . Qu'obtient-on pour  $n = 10\,000$  ?

3. En utilisant cette même inégalité, donner une estimation du nombre minimal de tirages nécessaires pour que la probabilité de l'événement  $\{0,24 < F_n < 0,26\}$  soit supérieure à 0,9.
4. On cherche, dans cette question, à minorer en fonction de  $n$  la probabilité de l'événement  $A_n = \{0,22 < F_n < 0,26\}$ .

(a) Quelle minoration obtient-on en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

(b) Donner une minoration de  $\mathbb{P}(A_n)$  en utilisant une approximation de la loi de  $S_n$  reposant sur le théorème central limite. On exprimera le résultat à l'aide de la fonction de répartition,  $\Phi$ , de la loi  $\mathcal{N}(0,1)$ .

**Exercice 4.** Un central téléphonique est construit pour  $n = 5000$  abonnés. Chaque jour, les abonnés téléphonent à l'heure de pointe avec une probabilité égale à  $p = 0,02$ . On suppose que les abonnés téléphonent de manière indépendante.

1. Préciser la loi du nombre d'appels,  $N$ , passés le 6 janvier 2011 à l'heure de pointe.
2. Comment approcher cette loi en utilisant le théorème central limite ?
3. En utilisant cette approximation, déterminer le nombre minimal  $C$  d'appels simultanés que doit gérer ce central pour que la probabilité que tous les appels soit transmis correctement le 6 janvier 2011 à l'heure de pointe soit supérieure à 97,5%. **Rappel :**  $\Phi(1,96) = 0,975$ .

**Exercice 5.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi  $\mathcal{N}(0,1)$ . On rappelle que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E} \left[ e^{itX_1} \right] = e^{-t^2/2}.$$

1. (a) Déterminer la limite lorsque  $n \rightarrow \infty$  de  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k)^2$ .
- (b) Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire  $2 + X_1$  ; préciser sa loi.
- (c) En déduire la limite lorsque  $n \rightarrow \infty$  de  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(3(2 + X_k))$ . **Rappel :** pour tout

réel  $\theta$ ,  $\sin(\theta) = \text{Im} \left( e^{i\theta} \right)$ .

2. Soit  $N$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{N}^*$  indépendante des variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 1}$ . On note, pour  $n \geq 1$ ,

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N X_k.$$

- (a) Calculer, pour tout  $n \geq 1$ , la fonction caractéristique de  $Y_n$  et préciser sa loi
- (b) En remarquant que, pour tout réel  $t$ ,

$$\mathbb{E} \left[ e^{itY} \right] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[ e^{itY_n} \mathbf{1}_{N=n} \right],$$

déterminer la fonction caractéristique de  $Y$  ainsi que sa loi.