

MATH504 : Correction rapide du partiel 2010/2011.

Exercice 1. 1. On a, notant M l'événement « l'étudiant obtient une note supérieure à 10 »,

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(M \cap C) + \mathbb{P}(M \cap P) = \mathbb{P}(M | C) \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(M | P) \mathbb{P}(P) = \frac{3}{4} \frac{4}{10} + x \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \left(x + \frac{1}{2} \right).$$

2. (a) La formule de Bayes donne

$$p(x) = \mathbb{P}(P | M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap P)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{\mathbb{P}(M | P) \mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{\frac{3}{5}x}{\frac{3}{5} \left(x + \frac{1}{2} \right)} = \frac{x}{x + \frac{1}{2}}.$$

(b) L'équation $p(x) = \frac{1}{2}$ possède une unique solution $x = \frac{1}{2}$.

(c) Pour que la correction soit équitable, l'obtention d'une note supérieure à 10 doit être indépendante du correcteur : les événements M et P doivent être indépendants. Or ces deux événements sont indépendants si et seulement si

$$x = \mathbb{P}(M | P) = \mathbb{P}(M) = \frac{3}{5} \left(x + \frac{1}{2} \right), \quad \text{soit} \quad x = \frac{3}{4};$$

ce résultat est conforme à l'intuition : les taux de réussite des deux correcteurs sont les mêmes.

Exercice 2. 1. On a $F_X(0) = 0$. La fonction F_X étant croissante et positive, on a $F_X(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

2. D'après le cours, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 1) &= F_X(1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} & \mathbb{P}(1 < X \leq 2) &= F_X(2) - F_X(1) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{3}{4} = \frac{5}{36} \\ \mathbb{P}(X \geq 1) &= 1 - F_X(1-) = \frac{1}{2} & \mathbb{P}(X = 2) &= F_X(2) - F_X(2-) = \frac{8}{9} - \left(1 - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

3. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, nous avons

$$\mathbb{P}(X = k) = F_X(k) - F_X(k-) = 1 - \frac{1}{(k+1)^2} - \left(1 - \frac{1}{(k+1)k} \right) = \frac{1}{k(k+1)^2}.$$

De plus, $\mathbb{P}(X = 0) = F_X(0) - F_X(0-) = 0$.

4. F_X n'étant pas continue, X ne possède pas de densité.

5. Puis que $\mathbb{P}(X < 0) = 0$, Y est à valeurs dans \mathbf{N} . Pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X < k+1) = F_X((k+1)-) - F_X(k-) = 1 - \frac{1}{(k+2)(k+1)} - \left(1 - \frac{1}{(k+1)k} \right),$$

et finalement

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}.$$

Exercice 3. 1. p est une densité de probabilité si et seulement si p est une fonction positive sur \mathbf{R} vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

p est positive sur \mathbf{R} si et seulement si $a \geq 0$. D'autre part,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = a \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x^2} dx = a \left[-e^{-\lambda x^2} / (2\lambda) \right]_0^{+\infty} = \frac{a}{2\lambda} \left(1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x^2} \right) = \frac{a}{2\lambda}.$$

Par conséquent, p est une densité de probabilité si et seulement si $a = 2\lambda$.

2. Puisque la densité de X est nulle sur \mathbf{R}_- , $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = 0$ si $t < 0$. Pour tout réel $t \geq 0$,

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t 2\lambda x e^{-\lambda x^2} \mathbf{1}_{x \geq 0} dx = \int_0^t 2\lambda x e^{-\lambda x^2} dx = \left[-e^{-\lambda x^2} \right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t^2}.$$

3. Y est une variable aléatoire positive. Par conséquent, $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = 0$ si $t < 0$. Pour $t \geq 0$, puisque $\mathbb{P}(X < 0) = 0$,

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{t}) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Y suit la loi exponentielle de paramètre λ .

F_Y étant continue sur \mathbf{R} et \mathcal{C}^1 par morceaux, Y possède une densité obtenue en dérivant F_Y lorsque cette fonction est dérivable et en mettant 0 sinon. On obtient $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}$.

Exercice 4. 1. Voir cours.

2. (a) Pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{N}$, comme $\{X > n+k\} \subset \{X > k\}$,

$$\mathbb{P}(X > n+k | X > n) = \frac{\mathbb{P}(\{X > n+k\} \cap \{X > k\})}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{\mathbb{P}(X > n+k)}{\mathbb{P}(X > n)}.$$

D'autre part, pour tout $h \in \mathbf{N}$,

$$\mathbb{P}(X > h) = \sum_{k \geq h+1} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k \geq h+1} p(1-p)^{k-1} = (1-p)^h p \sum_{k-(h+1) \geq 0} (1-p)^{k-(h+1)} = (1-p)^h.$$

Finalement, pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathbb{P}(X > n+k | X > n) = \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = \mathbb{P}(X > k).$$

(b) Soit $0 < s < 1$. On a

$$\mathbb{E}[s^X] = \sum_{k \geq 1} s^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k \geq 1} s^k p(1-p)^{k-1} = ps \sum_{k-1 \geq 0} [(1-p)s]^{k-1} = \frac{ps}{1 - (1-p)s}.$$