

MATH504 : Correction rapide de l'examen 2009/2010.

Exercice 1. 1. Désignons par R l'événement « la boule tirée est rouge » et par U_k « l'urne choisie est l'urne n° k ». Nous avons

$$\mathbb{P}(R) = \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(R \cap U_k) = \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(R | U_k) \mathbb{P}(U_k) = \sum_{k=1}^N \frac{k}{N} \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2N}.$$

2. Soit $k \in \{1, \dots, N\}$. Par définition,

$$\mathbb{P}(U_k | R) = \frac{\mathbb{P}(U_k \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(R | U_k) \mathbb{P}(U_k)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\frac{k}{N} \times \frac{1}{N}}{\frac{N+1}{2N}} = \frac{2k}{N(N+1)}.$$

Exercice 2. 1. G est à valeurs dans \mathbf{N}^* et, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, puisque F_X est continue,

$$\mathbb{P}(G = k) = \mathbb{P}(1 + [X] = k) = \mathbb{P}(k-1 \leq X < k) = F_X(k-) - F_X((k-1)-) = F_X(k) - F_X(k-1).$$

On obtient, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathbb{P}(G = k) = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = (1 - e^{-\lambda}) (e^{-\lambda})^{k-1},$$

G suit la loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$.

2. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et bornée. On a

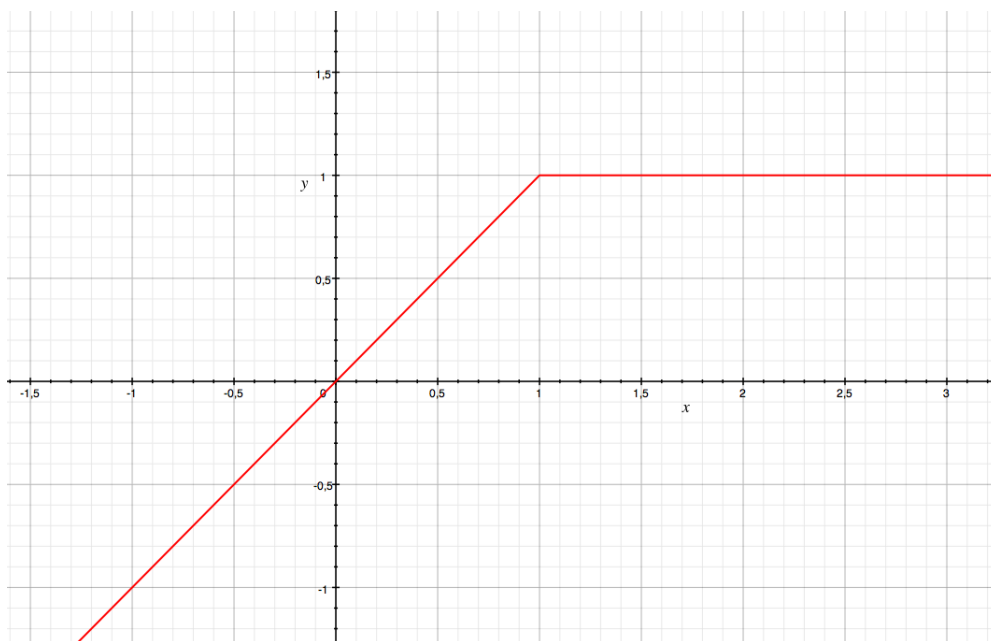
$$\mathbb{E} [f(X^2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2) \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0} dx = \lambda \int_0^{+\infty} f(x^2) e^{-\lambda x} dx,$$

et, le changement de variable $y = x^2$, $x = \sqrt{y}$, $dx = dy/(2\sqrt{y})$ donne

$$\mathbb{E} [f(X^2)] = \lambda \int_0^{+\infty} f(y) e^{-\lambda \sqrt{y}} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \lambda \frac{e^{-\lambda \sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} \mathbf{1}_{y > 0} dy.$$

Y a pour densité $y \longmapsto \lambda \frac{e^{-\lambda \sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} \mathbf{1}_{y > 0}$.

3. (a) Voici le graphe de la fonction $x \longmapsto \min(x, a)$ pour $a = 1$.



(b) Nous avons, pour $z \in \mathbf{R}$,

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(\min(X, a) \leq z) = \begin{cases} 1, & \text{si } z \geq a, \\ \mathbb{P}(X \leq z) = F_X(z), & \text{si } z < a. \end{cases}$$

Finalement $F_Z(z) = 1$ si $z \geq a$, $F_Z(z) = 0$ si $z < 0$ et $F_Z(z) = 1 - e^{-\lambda z}$ si $0 \leq z < a$.

4. D'après la loi des grands nombres, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-X_k} = \mathbb{E}[e^{-X_1}], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(3X_k) = \mathbb{E}[\cos(3X_1)].$$

Un calcul élémentaire donne

$$\mathbb{E}[e^{-X_1}] = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-\lambda x} = \lambda \left[-\frac{e^{-(1+\lambda)x}}{1+\lambda} \right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

D'autre part, via le formulaire,

$$\mathbb{E}[\cos(3X_1)] = \operatorname{Re} \left(\mathbb{E}[e^{i3X_1}] \right) = \operatorname{Re}(\varphi_{X_1}(3)) = \operatorname{Re} \left(\frac{\lambda}{\lambda - 3i} \right) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 9}.$$

Exercice 3. 1. Notons $X_i = 1$ si le i^{e} véhicule commet une infraction, $X_i = 0$ sinon. Les variables X_i , $i = 1, \dots, n = 5000$ sont indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,2$. Par conséquent, le nombre d'infractions $N = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

2. D'après le TCL, on peut approcher en loi N par une variable aléatoire de loi gaussienne $\mathcal{N}(np, np(1-p))$; autrement dit, on peut approcher, en loi, $(N - np)/\sqrt{np(1-p)}$ par une variable aléatoire G de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

3. Le gain minimal fait par la gendarmerie est $45N$. On cherche donc le coût maximal de l'opération C de sorte que $\mathbb{P}(45N > C) \geq 0,9$. Or,

$$\mathbb{P}(45N > C) = \mathbb{P} \left(\frac{N - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{C/45 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right).$$

Pour trouver C , on remplace dans cette dernière expression, $(N - np)/\sqrt{np(1-p)}$ par une variable aléatoire G de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et on obtient

$$\mathbb{P} \left(\frac{N - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{C/45 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) \simeq \mathbb{P} \left(G > \frac{C/45 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) = 1 - \Phi \left(\frac{C/45 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right).$$

On cherche donc C tel que

$$1 - \Phi \left(\frac{C/45 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) \geq 0,9 \quad \text{i.e.} \quad \Phi \left(\frac{C/45 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) \leq 0,1 = \Phi(-1,28).$$

Φ étant strictement croissante, on obtient finalement

$$\frac{C/45 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq -1,28, \quad C \leq 45 \left(np - 1,28\sqrt{np(1-p)} \right) \approx 43370,83.$$

Exercice 4. 1. Voir cours.

2. (a) Pour tout $0 < \lambda < 1$, la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ est strictement croissante et

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq 1+r\right) = \mathbb{P}(S_n \geq n(1+r)) = \mathbb{P}(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda n(1+r)}).$$

L'inégalité de Markov donne, pour tout $0 < \lambda < 1$, comme les v.a. $(X_k)_{k \geq 1}$ sont indépendantes,

$$\mathbb{P}(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda n(1+r)}) \leq e^{-\lambda n(1+r)} \mathbb{E}[e^{\lambda S_n}] = e^{-\lambda n(1+r)} \mathbb{E}[e^{\lambda X_1} \dots e^{\lambda X_n}] = e^{-\lambda n(1+r)} \mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] \dots \mathbb{E}[e^{\lambda X_n}]$$

et finalement, puisque les v.a. $(X_k)_{k \geq 1}$ sont identiquement distribuées,

$$\mathbb{P}(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda n(1+r)}) \leq \left(e^{-\lambda(1+r)} \mathbb{E}[e^{\lambda X_1}]\right)^n.$$

(b) Un calcul élémentaire donne, pour $0 < \lambda < 1$,

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] = \int_0^{+\infty} e^{\lambda x} e^{-x} dx = \left[-\frac{e^{-(1-\lambda)x}}{1-\lambda}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Par conséquent, notant $u(\lambda) = e^{-\lambda(1+r)}/(1-\lambda)$,

$$\forall 0 < \lambda < 1, \quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq 1+r\right) \leq u(\lambda)^n, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq 1+r\right) \leq \inf\{u(\lambda) : 0 < \lambda < 1\}^n.$$

Étudions rapidement la fonction u ; u est dérivable sur $]0, 1[$ et

$$\forall 0 < \lambda < 1, \quad u'(\lambda) = \frac{e^{-\lambda(1+r)}}{(1-\lambda)^2} (1 - (1+r)(1-\lambda)).$$

On a donc $u'(\lambda) < 0$ pour $0 < \lambda < r/(1+r)$, $u'(\lambda) > 0$ si $r/(1+r) < \lambda < 1$ et $u'(r/(1+r)) = 0$. u atteint son minimum au point $r/(1+r)$ et $u(r/(1+r)) = e^{-r}(1+r)$. D'où

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq 1+r\right) \leq e^{-nr}(1+r)^n.$$

Exercice 5. 1. (a) S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, T_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1-p)$.

(b) S_n et T_n ne sont pas indépendantes. En effet,

$$\mathbb{P}(S_n = 0, T_n = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0, n - S_n = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0, S_n = n) = 0$$

tandis que

$$\mathbb{P}(S_n = 0) \times \mathbb{P}(T_n = 0) = (1-p)^n \times p^n > 0.$$

2. (a) Puisque N est à valeurs entières, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathbb{P}(U = k) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(U = k, N = n) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_N = k, N = n) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n = k, N = n).$$

Puisque S_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, S_n est à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$ et donc $\mathbb{P}(S_n = k, N = n) = 0$ si $n < k$. On obtient finalement

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbb{P}(U = k) = \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(S_n = k, N = n).$$

(b) Puisque les v.a. N et $(X_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes, S_n et N le sont également. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathbb{P}(U = k) = \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(S_n = k, N = n) = \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(S_n = k) \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n \geq k} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

ce qui donne après simplifications

$$\mathbb{P}(U = k) = \sum_{n \geq k} \frac{e^{-\lambda}}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \lambda^{n-k} \lambda^k = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n-k \geq 0} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} ;$$

U suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

(c) $1 - X_1$ suit la loi $\mathcal{B}(1-p)$; V se comporte comme U au changement de p par $1-p$ près. En particulier, V suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda(1-p))$.

(d) Soient $k \in \mathbf{N}$ et $l \in \mathbf{N}$. On a

$$\mathbb{P}(U = k, V = l) = \mathbb{P}(S_N = k, N - S_N = l) = \mathbb{P}(S_N = k, N = k+l) = \mathbb{P}(S_{k+l} = k, N = k+l),$$

et par indépendance de S_{k+l} et N ,

$$\mathbb{P}(U = l, V = k) = \mathbb{P}(S_{k+l} = k) \mathbb{P}(N = k+l) = C_{k+l}^k p^k (1-p)^l e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \frac{(\lambda(1-p))^l}{l!}.$$

L'expression précédente est à variables séparées donc U et V sont indépendantes.