

MATH 504 : Probabilités et statistiques

Examen partiel : durée deux heures.

Seul le formulaire des lois usuelles est autorisé.

Mercredi 03 novembre 2010.

Exercice 1. Deux correcteurs – appelons-les « C » et « P » – vont se répartir les copies du partiel de MATH504 ; C corrigera 40% des copies et P 60%. C a décidé d’attribuer une note supérieure à 10 à 75% des étudiants dont elle corrige la copie. Dans la suite, x désigne le pourcentage d’étudiants à qui P attribuera une note supérieure à 10.

On choisit un étudiant au hasard.

1. Quelle est, en fonction de x , la probabilité qu’il obtienne une note supérieure à 10 ?
2. (a) L’étudiant a obtenu une note supérieure à 10. Quelle est, en fonction de x , la probabilité $p(x)$ que sa copie ait été corrigée par P ?
(b) P décide de choisir x de sorte que $p(x) = \frac{1}{2}$. Quelle est la valeur de x ?
(c) Le choix précédent de x est-il équitable ? Sinon pour quelle valeur de x la correction est-elle équitable ?

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire ; on note F_X sa fonction de répartition qui vérifie, notant $[x]$ la partie entière du réel x ,

$$\forall t \geq 0, \quad F_X(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)[t+1]}.$$

1. Préciser, pour tout $t < 0$, $F_X(t)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(\{X \leq 1\})$, $\mathbb{P}(\{1 < X \leq 2\})$, $\mathbb{P}(\{X \geq 1\})$, $\mathbb{P}(\{X = 2\})$.
3. Déterminer, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathbb{P}(\{X = k\})$.
4. X possède-t-elle une densité ?
5. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = [X]$?

Exercice 3. Soient λ un réel strictement positif et p la fonction définie par :

$$p(x) = axe^{-\lambda x^2} \mathbf{1}_{x \geq 0} = \begin{cases} axe^{-\lambda x^2}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

où $a \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que p est une densité de probabilité si et seulement si $a = 2\lambda$.
On suppose désormais que $a = 2\lambda$. Soit X une variable aléatoire de densité p .
2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. Trouver la fonction de répartition ainsi que la densité de la variable aléatoire $Y = X^2$.

Exercice 4. Soit Ω un ensemble non vide et \mathcal{F} une tribu sur Ω .

1. Donner la définition d'une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) où Ω est un ensemble non vide et \mathcal{F} une tribu sur Ω .
2. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$: X est à valeurs dans \mathbf{N}^* et pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{P}(\{X = k\}) = p(1 - p)^{k-1}$.

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbb{P}(\{X > n + k\} \mid \{X > n\}) = \mathbb{P}(\{X > k\}).$$

(b) Calculer, pour tout $0 < s < 1$, $\mathbb{E}[s^X]$.