

## MATH 504 : Probabilités et statistiques

Examen terminal : durée trois heures.

*Seul le formulaire des lois usuelles est autorisé.*

Jeudi 08 janvier 2009.

**Exercice 1.** Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'apparition d'un six soit de  $1/2$ . On choisit un dé au hasard, on le jette, et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

**Exercice 2.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .  $X$  et  $Y$  ont pour fonction de répartition

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \text{ si } x \geq 0, \quad F(x) = 0, \text{ si } x < 0,$$

et pour densité  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}$ .

1. Soit  $M = \max(X, Y)$ .
  - (a) Déterminer la fonction de répartition de  $M$ .
  - (b)  $M$  possède-t-elle une densité ? Si oui la calculer.
  - (c) Calculer  $\mathbb{E}[M]$ .
2. Soit  $\alpha > 0$ . Déterminer la loi de la variable aléatoire  $P = e^{-\alpha X}$ .
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Q = [X^2]$  où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .
4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $U$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$  :

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad \mathbb{P}(U = k) = \frac{1}{n}.$$

On suppose que  $X$  et  $U$  sont indépendantes.

- (a) Calculer, pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $\mathbb{E}[e^{-kX}]$ .
- (b) Justifier l'égalité

$$e^{-XU} = \sum_{k=1}^n e^{-kX} \mathbf{1}_{U=k}.$$

- (c) Calculer  $\mathbb{E}[e^{-XU}]$ .

**Exercice 3.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes :  $X$  suit la loi  $\mathcal{N}(1, 2)$ ,  $Y$  suit la loi  $\mathcal{N}(-2, 3)$ . On pose  $Z = 2X - Y$ .

1. (a) Calculer l'espérance et la variance de  $Z$ .  
 (b) Que vaut  $\mathbb{E}[Z^2]$  ?  
 (c) Préciser la loi de la variable aléatoire  $Z$ .
2. Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi  $\mathcal{N}(1, 2)$ .  
 (a) Déterminer la limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  de

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k)^2.$$

- (b) En déduire la limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  du rapport

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sum_{k=1}^n (X_k)^2}.$$

**Exercice 4.** Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. À instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

1. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant  $t$ . Quelle est la loi de  $X$  ? Quelle est son espérance, son écart-type ?
2. On pose  $Y = (X - 1000)/\sqrt{800}$ . Pourquoi peut-on approcher la loi de  $Y$  par la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
3. Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2,5%. En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions. On rappelle que  $\Phi(1, 96) = 0, 975$ .

**Exercice 5.** On a  $n$  boîtes numérotées de 1 à  $n$ . La boîte  $k$  contient  $k$  boules numérotées de 1 à  $k$ . On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans la boîte. Soit  $X$  le numéro de la boîte, et  $Y$  le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
2. Déterminer la loi de  $Y$  et son espérance.
3. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
4. Calculer  $\mathbb{P}(X = Y)$ .