

## MATH504 : Correction rapide de la deuxième session.

**Exercice 1.**  $\mathbb{P}(G) = \frac{3}{7}$ ,  $\mathbb{P}(F) = \frac{4}{7}$ ,  $\mathbb{P}(YM|G) = \frac{2}{3}$ ,  $\mathbb{P}(YB|G) = \frac{1}{3}$ ,  $\mathbb{P}(YM|F) = \frac{3}{4}$ ,  $\mathbb{P}(YB|F) = \frac{1}{4}$ .

1.  $\mathbb{P}(YB) = \mathbb{P}(YB|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(YB|G)\mathbb{P}(G) = \frac{1}{4}\frac{4}{7} + \frac{1}{3}\frac{3}{7} = \frac{2}{7}$ .
2.  $\mathbb{P}(G|YM) = \frac{\mathbb{P}(G \cap YM)}{\mathbb{P}(YM)} = \frac{\mathbb{P}(YM|G)\mathbb{P}(G)}{1 - \mathbb{P}(YB)} = \frac{2/3 * 3/7}{5/7} = \frac{2}{5}$ .
3.  $\mathbb{P}_F(CB|YB) = 0.6$ ,  $\mathbb{P}_F(CM|YM) = 2/3$ .  
 $\mathbb{P}_F(CB) = \mathbb{P}_F(CB|YB)\mathbb{P}_F(YB) + \mathbb{P}_F(CB|YM)\mathbb{P}_F(YM) = 0.6 * 1/4 + 1/3 * 3/4 = \frac{2}{5}$ .

### Exercice 2.

1. On veut  $c \int_1^{+\infty} x^{-4} dx = 1$ , i.e.  $c = 3$ .
2.  $\mathbb{E}[X] = 3 \int_1^{\infty} x^{-3} dx = \frac{3}{2}$ .
3. On utilise la méthode de la fonction muette.  
 $\mathbb{E}[g(Y)] = \mathbb{E}[g(\ln(X))] = 3 \int_1^{\infty} g(\ln(x)) x^{-4} dx$ . On pose le changement de variable  $y = \ln(x)$ ,  
 $dy = \frac{dx}{x}$ . On obtient  $\mathbb{E}[g(Y)] = 3 \int_0^{\infty} g(y) e^{-3y} dy$ . La loi de Y est donc une exponentielle de  
paramètre 3.  
 $\mathbb{E}[Y] = 3 \int_0^{\infty} y e^{-3y} dy$ . Par intégration par parties on obtient  $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{3}$ .

### Exercice 3.

1.  $S \sim \mathcal{B}(n, 0.9)$ .
2. On cherche  $n$  tel que  $\mathbb{P}(S \geq 750) \geq 0.975$ . En utilisant le TCL, on a que pour  $n$  grand  
 $\left(\frac{S}{n} - 0.9\right) \frac{\sqrt{n}}{0.3}$  peut être approché par une  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On cherche donc  $n$  tel que

$$\mathbb{P}\left(G \geq \left(\frac{750}{n} - 0.9\right) \frac{\sqrt{n}}{0.3}\right) \geq 0.975,$$

$$\text{i.e. } \left(\frac{750}{n} - 0.9\right) \frac{\sqrt{n}}{0.3} \leq -1.96.$$

3. On obtient une équation du second degré en  $\sqrt{n}$ .  $\Delta = (1.96)^2 - 4 * 3 * 2500 \sim 30003$ . Les  
racines sont  $\frac{1.96 \pm \sqrt{\Delta}}{6}$ . Il faut donc  $n \geq 853$ .

**Exercice 4.**

1. D'après la loi des grands nombres  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k)^2 = \mathbb{E}[X_1^2]$ . Or  $\mathbb{E}[X_1^2] = \mathbb{V}[X_1] + (\mathbb{E}[X_1])^2$ . Comme  $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$  on obtient  $\mathbb{E}[X_1^2] = \lambda(1 + \lambda)$ .
2.  $\mathbb{E}[z^{X_1}] = \sum_{k \geq 0} z^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{(z\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(z-1)}$ .
3.  $Y_n$  suit une binomiale de paramètre  $(n, p)$ .
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (T_k)^2 = \mathbb{E}[T_1^2] = p$ .
5.  $\mathbb{E}[z^{T_1}] = pz + (1-p)$ .  $\mathbb{E}[z^{Y_n}] = (\mathbb{E}[z^{T_1}])^n = (pz + (1-p))^n$ .
6.  $\mathbb{E}[z^U] = \mathbb{E}[z^{Y_N}] = \mathbb{E}[\sum_{n \geq 0} z^{Y_n} \mathbf{1}_{N=n}] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}[z^{Y_n} \mathbf{1}_{N=n}]$ .
7. Etant donné que  $N$  est indépendante des  $T_i$ , la dernière égalité nous donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[z^U] &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}[z^{Y_n}] \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n \geq 0} (pz + (1-p))^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n \geq 0} (\lambda pz + \lambda(1-p))^n \frac{1}{n!} = e^{\lambda p(z-1)} \end{aligned}$$

**Exercice 5.**

1.  $X_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{8})$ .
2.  $\mathbb{P}(\frac{X_n}{n} \geq \frac{1}{4}) \leq \frac{\mathbb{E}[X_n]}{1/(4n)} = \frac{1}{2}$ .
3.  $\mathbb{P}(\frac{X_n}{n} \in [\frac{1}{16}, \frac{3}{16}]) = \mathbb{P}(|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{8}| \leq \frac{1}{16})$ . Or B.T. nous donne  $\mathbb{P}(|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{8}| \geq \frac{1}{16}) \leq \frac{\mathbb{V}(X_n/n)}{(1/16)^2}$ , i.e.  $\mathbb{P}(|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{8}| \geq \frac{1}{16}) \leq \frac{\mathbb{V}(X_n/n)}{(1/16)^2} = \frac{28}{n}$ . On obtient  $1 - \mathbb{P}(|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{8}| \leq \frac{1}{16}) \leq \frac{28}{n}$ , d'où  $\mathbb{P}(\frac{X_n}{n} \in [\frac{1}{16}, \frac{3}{16}]) \geq 1 - \frac{28}{n}$ .  
On cherche  $n$  tel que  $1 - \frac{28}{n} \geq 0.9$ , i.e.  $n \geq 280$ .
4. Par le TCL on a pour  $n$  grand  $(\frac{X_n}{n} - \frac{1}{8}) \frac{8\sqrt{n}}{\sqrt{7}}$  suit une  $\mathcal{N}(0, 1)$ .  $\mathbb{P}(\frac{X_n}{n} \in [\frac{1}{16}, \frac{3}{16}]) = \mathbb{P}(|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{8}| \frac{8\sqrt{n}}{\sqrt{7}} \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{7}}) = \mathbb{P}(|G| \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{7}})$ . Il faut donc que  $\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{7}} \geq 1.64$ , i.e.  $n \geq 76$ .