

MATH 504 : Probabilités et statistiques

Examen partiel : durée deux heures.

Seul le formulaire des lois usuelles est autorisé.

Jeudi 03 novembre 2011.

Exercice 1. Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Soit B l'événement « l'étudiant donne la bonne réponse ».

1. Calculer $\mathbb{P}(B)$.
2. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse à une question lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F_X est donnée par

$$\forall t \geq 0, \quad F_X(t) = 1 - \frac{1}{1+t}.$$

1. (a) Préciser, pour tout $t < 0$, $F_X(t)$.
(b) Calculer $\mathbb{P}(\{X \leq 1\})$, $\mathbb{P}(\{X \geq 1\})$, $\mathbb{P}(\{X = 2\})$.
(c) Préciser la densité de X .
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = [X]$ où $[x]$ est la partie entière du réel x .
3. On note Z la variable aléatoire $Z = \max(3 - X, 0)$.
(a) Déterminer la fonction de répartition de Z .
(b) Z possède-t-elle une densité ? Si oui la calculer.

Exercice 3. Soit p la fonction définie par $p(x) = a e^{-2|x|}$ où $a \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que p est une densité de probabilité si et seulement si $a = 1$.
On suppose désormais que $a = 1$. Soit X une variable aléatoire de densité p .
2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. (a) Trouver la fonction de répartition $Y = e^X$.
(b) Y possède-t-elle une densité ? Si oui la préciser.

Exercice 4. Soient A, B, C trois variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi

$$\mathbb{P}(A = 1) = \mathbb{P}(A = 3) = \frac{1-p}{2}, \quad \mathbb{P}(A = 2) = p,$$

où $0 < p < 1$. Soit Q le polynôme à coefficients aléatoires $Q(X) = AX^2 + 2BX + C$.

1. (a) Calculer la probabilité pour que Q possède une seule racine réelle ?
(b) Pour quelle valeur de p cette dernière probabilité est-elle minimale ?
2. Déterminer la probabilité pour que le polynôme Q possède deux racines réelles ?

MATH504 : Correction rapide du partiel 2011/2012.

Exercice 1. Notons B l'événement « l'étudiant donne la bonne réponse » et C l'événement « l'étudiant connaît la bonne réponse ». On a

$$\mathbb{P}(C) = p, \quad \mathbb{P}(B|C) = 1, \quad \mathbb{P}(B|\bar{C}) = \frac{1}{m}.$$

1. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(B \cap \bar{C}) = \mathbb{P}(B|C) \times \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B|\bar{C}) \times \mathbb{P}(\bar{C}) = p + \frac{1}{m}(1-p) = \frac{(m-1)p+1}{m}.$$

2. Nous avons

$$\mathbb{P}(C|B) = \mathbb{P}(B|C) \times \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(B)^{-1} = \frac{mp}{(m-1)p+1}.$$

Exercice 2. 1. (a) Puisque $F_X(0) = 0$, $F_X(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

(b) F_X est continue sur \mathbf{R} donc

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = F_X(1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = 0.$$

(c) F_X est continue sur \mathbf{R} et \mathcal{C}^1 par morceaux ; X possède une densité obtenue en dérivant F_X lorsque cette fonction est dérivable et en mettant 0 sinon. X a pour densité la fonction f définie par

$$f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0, \quad f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \text{ si } x > 0.$$

2. Y est à valeurs entières ; pour tout $k \in \mathbf{N}$, comme F_X est continue

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X < k+1) = F_X(k+1) - F_X(k) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

3. (a) Z est positive donc $F_Z(t) = 0$ pour $t < 0$. Pour $t \geq 0$, comme F_X est continue,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max(3-X, 0) \leq t) &= \mathbb{P}(\max(3-X, 0) \leq t, X \leq 3) + \mathbb{P}(\max(3-X, 0) \leq t, X > 3) \\ &= \mathbb{P}(3-X \leq t, X \leq 3) + \mathbb{P}(X > 3) \\ &= F_X(3) - F_X(3-t) + 1 - F_X(3) = 1 - F_X(3-t). \end{aligned}$$

Finalement,

$$F_Z(t) = 0, \text{ si } t < 0, \quad F_Z(t) = \frac{1}{4-t}, \text{ si } 0 \leq t < 3, \quad F_Z(t) = 1, \text{ si } t \geq 3.$$

(b) F_Z n'est pas continue donc Z ne possède pas de densité.

Exercice 3. 1. p est une densité de probabilité si et seulement si p est une fonction positive sur \mathbf{R} vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

p est positive sur \mathbf{R} si et seulement si $a \geq 0$. D'autre part, par parité,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 2a \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = a \left[-e^{-2x} \right]_0^{+\infty} = a.$$

Par conséquent, p est une densité de probabilité si et seulement si $a = 1$.

2. Pour tout réel $t \leq 0$,

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t e^{2x} dx = \left[e^{2x}/2 \right]_{-\infty}^t = \frac{e^{2t}}{2}.$$

Pour $t > 0$,

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^0 p(x) dx + \int_0^t p(x) dx = F_X(0) + \int_0^t e^{-2x} dx = \frac{1}{2} + \left[-e^{-2x}/2 \right]_0^t = 1 - \frac{e^{-2t}}{2}.$$

3. (a) $Y = e^X$ est une variable aléatoire strictement positive. Par conséquent, $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = 0$ si $t \leq 0$. Pour $t > 0$,

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(e^X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \ln t) = F_X(\ln t) = \begin{cases} \frac{e^{2 \ln t}}{2}, & \text{si } \ln t \leq 0, \\ 1 - \frac{e^{-2 \ln t}}{2}, & \text{si } \ln t > 0, \end{cases}.$$

Finalement,

$$F_Y(t) = 0, \text{ si } t < 0, \quad F_Y(t) = \frac{t^2}{2}, \text{ si } 0 \leq t < 1, \quad F_Y(t) = 1 - \frac{1}{2t^2}, \text{ si } t \geq 1.$$

(b) F_Y étant continue sur \mathbf{R} et \mathcal{C}^1 par morceaux, Y possède une densité obtenue en dérivant F_Y lorsque cette fonction est dérivable et en mettant 0 sinon. Y a pour densité la fonction f définie par

$$f(x) = 0, \text{ si } x < 0, \quad f(x) = \frac{x}{2}, \text{ si } 0 \leq x < 1, \quad f(x) = \frac{1}{x^3}, \text{ si } x \geq 1.$$

Exercice 4. 1. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B^2 = AC) &= \mathbb{P}(B^2 = AC, B = 1) + \mathbb{P}(B^2 = AC, B = 2) + \mathbb{P}(B^2 = AC, B = 3) \\ &= \mathbb{P}(A = 1, B = 1, C = 1) + \mathbb{P}(A = 2, B = 2, C = 2) + \mathbb{P}(A = 3, B = 3, C = 3) \end{aligned}$$

et comme les variables sont indépendantes et de même loi

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(B = 1)^2 + \mathbb{P}(B = 2)^3 + \mathbb{P}(B = 3)^3, \\ &= 2 \left(\frac{1-p}{2} \right)^3 + p^3, \\ &= \frac{1 - 3p + 3p^2 + 3p^3}{4}. \end{aligned}$$

(a) Une rapide étude de la fonction $p \mapsto 1 - 3p + 3p^2 + 3p^3$ montre que la probabilité d'obtenir une racine double réelle est minimale pour $p = 1/3$.

2. On cherche la probabilité $\mathbb{P}(4B^2 - 4AC > 0)$; on a, par indépendance,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B^2 - AC > 0) &= \mathbb{P}(B = 1, AC < 1) + \mathbb{P}(B = 2, AC < 4) + \mathbb{P}(B = 3, AC < 9), \\ &= \mathbb{P}(B = 1)\mathbb{P}(AC < 1) + \mathbb{P}(B = 2)\mathbb{P}(AC < 4) + \mathbb{P}(B = 3)\mathbb{P}(AC < 9), \\ &= \mathbb{P}(B = 1)\mathbb{P}(AC < 1) + \mathbb{P}(B = 2)(1 - \mathbb{P}(AC \geq 4)) + \mathbb{P}(B = 3)(1 - \mathbb{P}(AC \geq 9)),\end{aligned}$$

et, puisque A et C sont à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$,

$$= 0 + \mathbb{P}(B = 2)(1 - \mathbb{P}(A \geq 2, C \geq 2)) + \mathbb{P}(B = 3)(1 - \mathbb{P}(A = 3, C = 3)).$$

À nouveau par indépendance et comme A et C sont identiquement distribuées

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B^2 - AC > 0) &= \mathbb{P}(B = 2)(1 - \mathbb{P}(A \geq 2)^2) + \mathbb{P}(B = 3)(1 - \mathbb{P}(A = 3)^2), \\ &= \mathbb{P}(B = 2)(1 - (1 - \mathbb{P}(A = 1))^2) + \mathbb{P}(B = 3)(1 - \mathbb{P}(A = 3)^2), \\ &= p \left(1 - \left(\frac{1+p}{2}\right)^2\right) + \frac{1-p}{2} \left(1 - \left(\frac{1-p}{2}\right)^2\right), \\ &= p \frac{1-p}{2} \frac{3+p}{2} + \frac{1-p}{2} \frac{1+p}{2} \frac{3-p}{2}, \\ &= \frac{1-p}{8} (p^2 + 8p + 3).\end{aligned}$$