

MATH 504 : Probabilités et statistiques

Examen : durée deux heures.

Seul le formulaire des lois usuelles est autorisé.

Vendredi 06 janvier 2012.

Exercice 1. Une maladie affecte 1 habitant français sur 1000. Un test de dépistage est mis en place. Ce test est positif dans 99% des cas si l'individu est atteint de cette maladie ; il est également positif dans 0,2% des cas si l'individu n'est pas atteint de la maladie.

Un individu se fait dépister.

1. Calculer la probabilité que son test soit positif ?
2. Le test se révèle positif. Quelle est la probabilité que cet individu soit atteint de la maladie ?

Exercice 2. 1. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ c'est à dire de densité $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}$.

- (a) Calculer, pour tout $s \geq 0$, $u(s) = \mathbb{E}[e^{-sX}]$ et $v(s) = \mathbb{E}[Xe^{-sX}]$.
- (b) Comparer $u'(0)$ et $\mathbb{E}[X]$.

2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Déterminer, pour $s \geq 0$, la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ de

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-sX_k}, \quad \frac{\sum_{k=1}^n e^{-sX_k}}{\sum_{k=1}^n X_k e^{-sX_k}}.$$

3. On considère la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.

- (a) Déterminer la densité de Y .
 - (b) En déduire sa fonction de répartition.
 - (c) Calculer la moyenne et la variance de Y . On pourra penser aux gaussiennes pour le calcul de la moyenne.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = [Y]$.

Exercice 3. Chaque jour, dans une certaine ville, 100 personnes ont besoin d'un examen radioscopique. Pour préserver le libre choix, r centres d'imagerie sont installés dans cette ville. On admet que les patients choisissent indifféremment l'un ou l'autre centre d'imagerie.

1. Quelle est la probabilité qu'un patient choisisse le centre d'imagerie donné ?

Soit N le nombre de patients journaliers dans un centre d'imagerie donné.

2. Montrer que N peut s'écrire $N = \sum_{i=1}^{100} X_i$ où les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont n variables aléatoires indépendantes et distribuées suivant la loi de Bernoulli de même paramètre p que l'on précisera.

3. Quelle est la loi de N ?

4. On rappelle que, si G suit la loi normale centrée réduite, alors $\mathbb{P}(G \leq 2) = 98\%$.

En utilisant le théorème de la limite centrale, déterminer quelle capacité $c(r)$ chaque centre d'imagerie doit avoir pour être capable de répondre à la demande avec une probabilité de 98% ? Application numérique : $r = 1$, $r = 2$ et $r = 3$.

5. Quel est le coût de la concurrence : quelle surcapacité $s(r)$ la concurrence entraîne-t-elle par rapport à une situation où chaque centre se verrait affecter un même nombre de clients ? Application numérique : $r = 1$, $r = 2$ et $r = 3$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 16.

En utilisant l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev, minorer la probabilité $\mathbb{P}(10 < X < 22)$.