

MATH 504 : Probabilités et statistiques

Deuxième session : durée trois heures.

Seul le formulaire des lois usuelles est autorisé.

Lundi 23 février 2009.

Exercice 1. Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement potentiel d'un acheteur d'un téléviseur et d'un magnétoscope :

- la probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6 ;
- la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope s'il a acheté un téléviseur est de 0,4 ;
- la probabilité qu'il achète un magnétoscope s'il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?
3. Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées : F désigne la fonction de répartition de X_1 . Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire définie par

$$Z_k = \max(X_i : 1 \leq i \leq k) = \max(X_1, X_2, \dots, X_k).$$

1. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, exprimer la fonction de répartition H_k de Z_k en fonction de F et k .
2. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{N}^* indépendante des $(X_n)_{n \geq 1}$. On considère la variable aléatoire Z définie par $Z = \max(X_i : i \leq N)$ c'est à dire

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega)).$$

- (a) Justifier brièvement l'égalité, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$\{Z \leq x\} = \bigcup_{k \geq 1} (\{Z_k \leq x\} \cap \{N = k\}).$$

- (b) En déduire que la fonction de répartition H de Z est donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad H(x) = \sum_{k \geq 1} H_k(x) \mathbb{P}(N = k).$$

- (c) Déterminer H dans le cas où X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ et N suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Soient a et b deux réels. Déterminer, en fonction de a et b , la moyenne, la variance ainsi que la fonction caractéristique de la variable aléatoire $Z = aX_1 + bX_2$.
2. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
 - (a) Quelle est la loi de S_n ?
 - (b) Calculer l'espérance de $Y_n = \exp(S_n - n/2)$.
 - (c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = 0$ presque sûrement.

Exercice 4. Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. À instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t . Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type ?
2. On pose $Y = (X - 1000)/\sqrt{800}$. Pourquoi peut-on approcher la loi de Y par la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
3. Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2,5%. En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions. On rappelle que $\Phi(1,96) = 0,975$.

Exercice 5. Soient X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{N} de loi donnée par

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = (1 - \alpha) \alpha^k, \quad \text{où } 0 < \alpha < 1,$$

et N un entier supérieur ou égal à 2. On note Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de X par N .

1. Quelles sont les valeurs prises par Q et R ?
2. Déterminer la loi du couple (Q, R) . Q et R sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer les lois de Q et R ?