

MATH504 : Correction rapide de l'examen.

Exercice 1. On note T l'événement « le dé est truqué », E « le dé est équilibré » et S « obtenir un six ». Nous avons

$$\mathbb{P}(T|S) = \mathbb{P}(T \cap S) / \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S|T) \mathbb{P}(T) / \mathbb{P}(S) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{\mathbb{P}(S)} = \frac{1}{8} \frac{1}{\mathbb{P}(S)},$$

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S \cap T) + \mathbb{P}(S \cap E) = \mathbb{P}(S|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(S|E)\mathbb{P}(E) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Finalement, $\mathbb{P}(T|S) = 1/2$.

Exercice 2. 1. (a) Pour tout réel t , on a, puisque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et de même loi

$$\mathbb{P}(M \leq t) = \mathbb{P}(\max(X, Y) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t, Y \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t) \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t)^2,$$

c'est à dire $F_M(t) = F_X(t)^2 = F(t)^2$.

(b) La fonction F est continue sur \mathbf{R} et \mathcal{C}^1 par morceaux ; il en va de même de la fonction $F_M = F^2$. Par conséquent, M possède une densité obtenue en dérivant F_M lorsque cette dernière fonction est dérivable et en mettant 0 sinon. Un calcul élémentaire (F_M est en fait \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R}) donne, notant f_M la densité de M ,

$$f_M(t) = 2f(t) F(t) = 2\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x}) \mathbf{1}_{x \geq 0} = (2\lambda e^{-\lambda x} - 2\lambda e^{-2\lambda x}) \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

(c) Par définition, puisque M a pour densité f_M ,

$$\mathbb{E}[M] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_M(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx - \int_0^{+\infty} x 2\lambda e^{-2\lambda x} dx.$$

Le premier terme est égal à 2 fois l'espérance d'une v.a. suivant la loi exponentielle de paramètre λ et le second à l'espérance d'une v.a. suivant la loi exponentielle de paramètre 2λ . On obtient d'après le formulaire

$$\mathbb{E}[M] = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}.$$

2. Cherchons la densité de P (qui n'est pas discrète) en calculant pour toute fonction h continue et bornée $\mathbb{E}[h(P)]$. Nous avons, puisque X a pour densité f ,

$$\mathbb{E}[h(P)] = \mathbb{E}\left[h\left(e^{-\alpha X}\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} h(e^{-\alpha x}) \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Le changement de variable $y = e^{-\alpha x} - x = -\ln(y)/\alpha$, $dx = -dy/(\alpha y)$ - donne, puisque $e^{a \ln y} = y^a$,

$$\mathbb{E}[h(P)] = \int_0^{+\infty} h(e^{-\alpha x}) \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_1^0 h(y) e^{\lambda \frac{\ln y}{\alpha}} \frac{(-dy)}{\alpha y} = \int_0^1 h(y) \frac{\lambda}{\alpha} y^{\frac{\lambda}{\alpha}-1} dy ;$$

par conséquent, pour toute h continue et bornée sur \mathbf{R} ,

$$\mathbb{E}[h(P)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) \frac{\lambda}{\alpha} y^{\frac{\lambda}{\alpha}-1} \mathbf{1}_{0 < y < 1} dy.$$

P a pour densité $y \mapsto \frac{\lambda}{\alpha} y^{\frac{\lambda}{\alpha}-1} \mathbf{1}_{0 < y < 1}$.

3. Puisque la densité de X est nulle sur \mathbf{R}_- , X est positive ; par suite Q est une variable aléatoire discrète à valeurs entières. Pour déterminer la loi de Q , calculons, pour tout entier k , $\mathbb{P}(Q = k)$. Soit $k \in \mathbf{N}$; puisque X est positive,

$$\mathbb{P}(Q = k) = \mathbb{P}\left(\left[X^2\right] = k\right) = \mathbb{P}\left(k \leq X^2 < k+1\right) = \mathbb{P}\left(\sqrt{k} \leq X < \sqrt{k+1}\right),$$

et, F_X étant continue puisque X possède une densité,

$$\mathbb{P}(Q = k) = F\left(\sqrt{k+1}\right) - F\left(\sqrt{k}\right) = e^{-\lambda\sqrt{k}} - e^{-\lambda\sqrt{k+1}}.$$

4. (a) Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Nous avons, puisque X a pour densité $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}$,

$$\mathbb{E}\left[e^{-kX}\right] = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-kx} e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{e^{-(k+\lambda)x}}{k+\lambda} \right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda+k}.$$

(b) Puisque U est à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$, nous avons

$$\Omega = \bigcap_{k=1}^n \{U = k\}, \quad 1 = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{U=k}.$$

Cette dernière égalité fournit immédiatement

$$e^{-XU} = e^{-XU} \times 1 = e^{-XU} \times \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{U=k} = \sum_{k=1}^n e^{-XU} \mathbf{1}_{U=k} = \sum_{k=1}^n e^{-kX} \mathbf{1}_{U=k}.$$

(c) D'après la question précédente, puisque X et U sont indépendantes,

$$\mathbb{E}\left[e^{-XU}\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[e^{-XU} \mathbf{1}_{U=k}\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[e^{-kX} \mathbf{1}_{U=k}\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[e^{-kX}\right] \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{U=k}\right] ;$$

par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[e^{-XU}\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[e^{-kX}\right] \mathbb{P}(U = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda}{\lambda+k}.$$

Exercice 3. 1. (a) Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[2X - Y] = 2\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = 2 \times 1 - (-2) = 4,$$

et puisque X et Y sont indépendantes

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(2X) + \mathbb{V}(-Y) = (2)^2 \mathbb{V}(X) + (-1)^2 \mathbb{V}(Y) = 4\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 4 \times 2 + 3 = 11.$$

(b) Par définition, nous avons

$$\mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathbb{V}(Z) + \mathbb{E}[Z]^2 = 11 + 4^2 = 27.$$

(c) Z est une combinaison linéaire de deux variables aléatoires gaussiennes et indépendantes ; Z a donc une loi gaussienne. Par suite, Z suit la loi $\mathcal{N}(\mathbb{E}[Z], \mathbb{V}[Z]) = \mathcal{N}(4, 11)$.

2. (a) D'après la loi des grands nombres,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k)^2 = \mathbb{E}[(X_1)^2] = \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{E}[X_1]^2 = 2 + 1^2 = 3.$$

(b) Toujours d'après la loi des grands nombres,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = \mathbb{E}[X_1] = 1,$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sum_{k=1}^n (X_k)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k)^2} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 4. 1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5000$ et $p = 0,2$; son espérance est $np = 1000$ et sa variance $np(1-p) = 1000(1-p) = 800$.

2. Il s'agit de l'approximation usuelle de la loi binomiale provenant du théorème central limite.

3. Notons C le nombre de connections simultanées que le point d'accès peut gérer. Le point d'accès est saturé dès lors que $X > C$ et on souhaite que $\mathbb{P}(X > C) \leq 0,025$ soit encore $\mathbb{P}(Y > (C - 1000)/\sqrt{800}) \leq 0,025$. On cherche donc C de sorte que

$$1 - \mathbb{P}\left(Y \leq (C - 1000)/\sqrt{800}\right) \leq 0,025 \quad \text{c'est à dire} \quad \mathbb{P}\left(Y \leq (C - 1000)/\sqrt{800}\right) \geq 0,975.$$

Pour utiliser l'approximation précédente, on remplace la condition $\mathbb{P}\left(Y \leq (C - 1000)/\sqrt{800}\right) \geq 0,975$ par $\mathbb{P}\left(G \leq (C - 1000)/\sqrt{800}\right) \geq 0,975$ où G suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Finalement, on détermine C à l'aide de la relation $\Phi\left((C - 1000)/\sqrt{800}\right) \geq \Phi(1,96)$ qui donne, puisque Φ est strictement croissante

$$(C - 1000)/\sqrt{800} \geq 1,96 \quad \text{soit encore} \quad C \geq 1000 + 1,96\sqrt{800} \approx 1055,44.$$

Exercice 5. 1. X et Y sont à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$. Soient i et j deux entiers de $\{1, \dots, n\}$; nous avons $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0$ si $j > i$ et lorsque $j \leq i$

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(Y = j | X = i) \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{i} \frac{1}{n}.$$

Finalement, pour tous i et j éléments de $\{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{i} \frac{1}{n} \mathbf{1}_{j \leq i}$.

2. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \mathbf{1}_{j \leq i},$$

et, on a,

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{j=1}^n j \mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \mathbf{1}_{j \leq i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{i} \mathbf{1}_{j \leq i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i 1.$$

Or $\sum_{j=1}^i 1 = 1 + 2 + \dots + i = i(i+1)/2$ et

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (i+1) = \frac{1}{2n} \frac{n(n+3)}{2} = \frac{n+3}{4}.$$

3. X et Y ne sont pas indépendantes car $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ n'est pas à variables séparées.

4. On a

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i, Y = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$