

## MATH504 : Correction rapide de la deuxième session.

**Exercice 1.** 1. Avec des notations évidentes,

$$\mathbb{P}(M \cap T) = \mathbb{P}(M|T)\mathbb{P}(T) = 0,4 \times 0,6 = 0,24.$$

2. Bien évidemment,

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(M \cap \bar{T}) = \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(\bar{T}) \mathbb{P}(M|\bar{T}) = 0,24 + 0,2 \times 0,4 = 0,32.$$

3. Nous avons

$$\mathbb{P}(T|M) = \mathbb{P}(M \cap T)\mathbb{P}(M)^{-1} = \frac{0,24}{0,32} = \frac{3}{4}.$$

**Exercice 2.** 1. Soit  $t$  un réel. Bien évidemment,  $\max(X_1, \dots, X_k) \leq t \iff X_1 \leq t, \dots, X_k \leq t$ . Par suite, puisque les variables  $X_1, \dots, X_k$  sont indépendantes et identiquement distribuées,

$$\mathbb{P}(Z_k \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t, \dots, X_k \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t) \mathbb{P}(X_2 \leq t) \dots \mathbb{P}(X_k \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t)^k,$$

soit encore  $H_k(t) = F^k(t)$ .

2. (a) Puisque  $N$  est à valeurs dans  $\mathbf{N}^*$ , les ensembles  $\{N = k\}$ ,  $k \in \mathbf{N}^*$ , forment une partition de  $\Omega - \Omega = \cup_{k \geq 1} \{N = k\}$  – et, pour tout réel  $x$ ,

$$\{Z \leq x\} = \{Z \leq x\} \cap \Omega = \{Z \leq x\} \cap \bigcup_{k \geq 1} \{N = k\} = \bigcup_{k \geq 1} (\{Z \leq x\} \cap \{N = k\}) ;$$

or, lorsque  $N$  prend la valeur  $k$ ,  $Z$  est égale à  $Z_k$  et

$$\{Z \leq x\} = \bigcup_{k \geq 1} (\{Z_k \leq x\} \cap \{N = k\}).$$

(b) D'après la question précédente, pour  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$H(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} (\{Z_k \leq x\} \cap \{N = k\})\right) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\{Z_k \leq x\} \cap \{N = k\}) ;$$

les variables  $(X_n)_{n \geq 1}$  et  $N$  étant indépendantes,  $Z_k$  et  $N$  le sont également et

$$H(x) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(Z_k \leq x) \mathbb{P}(N = k) = \sum_{k \geq 1} H_k(x) P(N = k).$$

On obtient, d'après la première question, notant  $G_N$  la fonction génératrice de  $N$ ,

$$H(x) = \sum_{k \geq 1} F^k(x) \mathbb{P}(N = k) = G_N(F(x)).$$

(c) Si  $X_1$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ ,  $F(x) = x$  si  $x \in [0, 1]$ ,  $F(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $F(x) = 1$  si  $x \geq 1$ . On en déduit immédiatement que  $H(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $H(x) = 1$  si  $x \geq 1$ . Pour  $x \in [0, 1]$ , nous avons puisque  $\mathbb{P}(N = k) = p(1-p)^{k-1}$ ,

$$H(x) = \sum_{k \geq 1} x^k p(1-p)^{k-1} = px \sum_{k \geq 1} [x(1-p)]^{k-1} = \frac{px}{1 - (1-p)x}.$$

**Exercice 3.** 1. Par linéarité de l'espérance, on a  $\mathbb{E}[Z] = a\mathbb{E}[X_1] + b\mathbb{E}[X_2] = 0$ . Puisque  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes,

$$\mathbb{V}[Z] = \mathbb{V}[aX_1] + \mathbb{V}[bX_2] = a^2\mathbb{V}[X_1] + b^2\mathbb{V}[X_2] = a^2 + b^2.$$

Pour tout réel  $t$ , par indépendance de  $X_1$  et  $X_2$ ,

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{itZ}] = \mathbb{E}[e^{itaX_1} e^{itbX_2}] = \mathbb{E}[e^{itaX_1}] \mathbb{E}[e^{itbX_2}] = \varphi_{X_1}(at) \varphi_{X_2}(bt) = e^{-a^2 t^2/2} e^{-b^2 t^2/2}.$$

$\varphi_Z(t) = e^{-(a^2+b^2)t^2/2}$  :  $Z$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, a^2 + b^2)$ .

2. (a)  $S_n$  est une combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes ; c'est donc une gaussienne. On a  $\mathbb{E}[S_n] = n\mathbb{E}[X_1] = 0$  et  $\mathbb{V}[S_n] = n\mathbb{V}[X_1] = n$  puisque les variables  $(X_n)_{n \geq 1}$  sont i.i.d.  $S_n$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, n)$ .

(b) On a  $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[e^{S_n}] e^{-n/2}$ . Calculons  $\mathbb{E}[e^{S_n}]$ . Puisque  $S_n$  a pour loi  $\mathcal{N}(0, n)$ ,  $S_n/\sqrt{n}$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et

$$\mathbb{E}[e^{S_n}] = \mathbb{E}[e^{\sqrt{n}S_n/\sqrt{n}}] = \mathbb{E}[e^{\sqrt{n}X_1}].$$

Or, pour tout  $s \in \mathbf{R}$ , via  $y = x - s$ ,

$$\mathbb{E}[e^{sX_1}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s^2/2} e^{-(x-s)^2/2} dx = e^{s^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy.$$

et finalement  $\mathbb{E}[e^{sX_1}] = e^{s^2/2}$ .

Par conséquent,  $\mathbb{E}[e^{S_n}] = e^{n/2}$  et  $\mathbb{E}[Y_n] = 1$ .

(c) D'après la loi forte des grands nombres,  $S_n/n$  converge presque sûrement vers  $\mathbb{E}[X_1] = 0$ . Par suite,

$$\ln Y_n = S_n - \frac{n}{2} = n \left( \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \right) \longrightarrow -\infty$$

et  $Y_n$  converge presque sûrement vers 0.

**Exercice 4.** 1.  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 5000$  et  $p = 0,2$  ; son espérance est  $np = 1000$  et sa variance  $np(1-p) = 1000(1-p) = 800$ .

2. Il s'agit de l'approximation usuelle de la loi binomiale provenant du théorème central limite.

3. Notons  $C$  le nombre de connections simultanées que le point d'accès peut gérer. Le point d'accès est saturé dès lors que  $X > C$  et on souhaite que  $\mathbb{P}(X > C) \leq 0,025$  soit encore  $\mathbb{P}(Y > (C - 1000)/\sqrt{800}) \leq 0,025$ . On cherche donc  $C$  de sorte que

$$1 - \mathbb{P}\left(Y \leq (C - 1000)/\sqrt{800}\right) \leq 0,025 \quad \text{c'est à dire} \quad \mathbb{P}\left(Y \leq (C - 1000)/\sqrt{800}\right) \geq 0,975.$$

Pour utiliser l'approximation précédente, on remplace la condition  $\mathbb{P}\left(Y \leq (C - 1000)/\sqrt{800}\right) \geq 0,975$  par  $\mathbb{P}\left(G \leq (C - 1000)/\sqrt{800}\right) \geq 0,975$  où  $G$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Finalement, on détermine  $C$  à l'aide de la relation  $\Phi\left((C - 1000)/\sqrt{800}\right) \geq \Phi(1,96)$  qui donne, puisque  $\Phi$  est strictement croissante

$$(C - 1000)/\sqrt{800} \geq 1,96 \quad \text{soit encore} \quad C \geq 1000 + 1,96\sqrt{800} \approx 1055,44.$$

**Exercice 5.** 1.  $Q$  est à valeurs dans  $\mathbf{N}$  et  $R$  à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, N-1\}$ .

2. Pour  $q \in \mathbf{N}$  et  $r \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , nous avons, par définition de la division euclidienne,

$$\mathbb{P}(Q = q, R = r) = \mathbb{P}(X = qN + r) = (1 - \alpha)\alpha^{qN+r} = (1 - \alpha)\alpha^{qN}\alpha^r.$$

L'expression ci-dessus étant « à variables séparées », les variables aléatoires  $Q$  et  $R$  sont indépendantes.

3. Soit  $q \in \mathbf{N}$ .

$$\mathbb{P}(Q = q) = \sum_{r=0}^{N-1} \mathbb{P}(Q = q, R = r) = \sum_{r=0}^{N-1} (1 - \alpha)\alpha^{qN}\alpha^r = (1 - \alpha)\alpha^{qN} \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} = (1 - \alpha^N)\alpha^{qN}.$$

$1 + Q$  suit la loi géométrique de paramètre  $1 - \alpha^N$ .

D'autre part, pour  $r \in \{0, \dots, N-1\}$ ,

$$\mathbb{P}(R = r) = \sum_{q \geq 0} \mathbb{P}(Q = q, R = r) = \sum_{q \geq 0} (1 - \alpha)\alpha^{qN}\alpha^r = (1 - \alpha)\alpha^r \frac{1}{1 - \alpha^N}.$$