

## MATH 504 : Probabilités et statistiques

Examen partiel : durée deux heures.

*Aucun document n'est autorisé*

Lundi 02 novembre 2009.

**Exercice 1.** Une boîte de chocolats contient des chocolats bruns (au lait) et des chocolats noirs. Chaque chocolat est soit enveloppé soit non enveloppé. Dans cette boîte

- la proportion de chocolats bruns est  $3/4$  ;
- les proportions de chocolats enveloppés parmi les chocolats bruns et les chocolats noirs sont respectivement  $1/2$  et  $1/3$ .

Un gourmand choisit un chocolat au hasard, politesse oblige. On considère les événements  $B$  : « le chocolat est brun » et  $E$  : « le chocolat est enveloppé ».

1. Calculer les probabilités que le chocolat choisi soit :

- (a) enveloppé ;
- (b) brun sachant qu'il est enveloppé.

2. Les événements  $B$  et  $E$  sont-ils indépendants ? Si non, pour quelles compositions de la boîte le sont-ils ?

**Exercice 2.** Soit  $X$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $F_X$  donnée par

$$F_X(x) = 0, \text{ si } x < 0, \quad F_X(x) = x/5, \text{ si } 0 \leq x < 1, \quad F_X(x) = x/4, \text{ si } 1 \leq x < 2,$$

$$F_X(x) = x/3, \text{ si } 2 \leq x < 3, \quad F_X(x) = 1, \text{ si } x \geq 3.$$

1. (a) Tracer le graphe de  $F_X$  puis calculer  $\mathbb{P}(\{X \leq 1\})$ ,  $\mathbb{P}(\{X < 2\})$ ,  $\mathbb{P}(\{1 \leq X \leq 3\})$ ,  $\mathbb{P}(\{X > 2\})$ .

(b) Calculer, pour tout réel  $x$ ,  $\mathbb{P}(\{X = x\})$ .

(c)  $X$  possède-t-elle une densité ?

2. Déterminer les fonctions de répartition  $F_Y$  et  $F_Z$  des variables aléatoires  $Y = \min(X, 2)$  et  $Z = \max(X, 2)$ .

**Exercice 3.** Soient  $\lambda$  un réel strictement positif et  $p$  la fonction définie par :

$$p(x) = axe^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0} = \begin{cases} axe^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

où  $a \in \mathbf{R}$ .

1. Montrer que  $p$  est une densité de probabilité si et seulement si  $a = \lambda^2$ .

On suppose désormais que  $a = \lambda^2$ . Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $p$ .

2. Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .
3. Trouver la loi de la variable aléatoire  $Y = 2X$ .

**Exercice 4.** Albert et Zoé font une partie de dés : ils lancent à tour de rôle 2 dés équilibrés à 6 faces. Les lancers sont indépendants. Albert gagne si, quand il lance les dés, la somme des dés vaut 6 ; Zoé gagne si, lorsqu'elle lance les dés, la somme des dés vaut 7. Le jeu s'arrête lorsque l'un des deux joueurs gagne.

On note  $S_n$  la somme des dés au  $n$ -ième lancer.

1. Calculer  $\mathbb{P}(\{S_1 = 6\})$  et  $\mathbb{P}(\{S_1 = 7\})$ .

Albert commence la partie. On note, pour  $k \geq 1$ ,

- $A_k$  : « Albert gagne la partie au  $k$ -ième lancer »,
- $A$  : « Albert gagne la partie »,
- $B_k$  : « Zoé gagne la partie au  $k$ -ième lancer »,
- $B$  : « Zoé gagne la partie ».

2. Que valent, pour  $k \geq 1$ ,  $A_{2k}$  et  $B_{2k-1}$  ?
3. (a) Exprimer, pour  $k \geq 1$ ,  $A_{2k-1}$  et  $B_{2k}$  en fonction de  $S_1, \dots, S_{2k}$ .  
(b) En déduire, pour  $k \geq 1$ ,  $\mathbb{P}(A_{2k-1})$  et  $\mathbb{P}(B_{2k})$ .
4. Calculer  $\mathbb{P}(A)$  et  $\mathbb{P}(B)$ .
5. On note  $T$  la durée de la partie. Calculer  $\mathbb{E}[T]$ .