

MATH504 : Correction rapide de la deuxième session.

Exercice 1. Avec des notations évidentes, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap T) + \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{13} \right) = \frac{21}{208}.$$

D'autre part,

$$\mathbb{P}(T|A) = \mathbb{P}(T \cap A)\mathbb{P}(A)^{-1} = \mathbb{P}(A|T)\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(A)^{-1} = \frac{1}{16} \frac{208}{21} = \frac{13}{21}.$$

Exercice 2. 1. (a) Pour tout réel t , comme $a > 0$, $\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(U \leq (t - b)/a)$;

$$\mathbb{P}(X \leq t) = 0 \text{ si } t < b, \quad \mathbb{P}(X \leq t) = (t - b)/a \text{ si } b \leq t < a + b, \quad \mathbb{P}(X \leq t) = 1 \text{ si } t \geq a + b.$$

(b) D'après la question précédente, X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[b, a + b]$: $b = -1$, $a = 2$.

2. Y est à valeurs dans $\{1, \dots, 6\}$ puisque U est à valeurs dans $]0, 1[$. Pour tout $k \in \{1, \dots, 6\}$, comme la fonction de répartition de U est continue,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}([6U] = k - 1) = \mathbb{P}(k - 1 \leq 6U < k) = F(k/6) - F((k - 1)/6) = 1/6 ;$$

Y suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$.

3. Soit f une fonction continue et bornée. On a, U ayant pour densité $u \mapsto \mathbf{1}_{[0,1]}(u)$,

$$\mathbb{E}[f(Z)] = \int_0^1 f((1 - u)/u) du ;$$

le changement de variable $z = (1 - u)/u = 1/u - 1$, $u = 1/(z + 1)$, $du = -1/(z + 1)^2$ donne

$$\mathbb{E}[f(Z)] = - \int_{+\infty}^0 f(z) \frac{dz}{(1 + z)^2} = \int_{\mathbf{R}} f(z) \frac{1}{(1 + z)^2} \mathbf{1}_{z \geq 0} dz.$$

Z a pour densité la fonction $z \mapsto \frac{1}{(1+z)^2} \mathbf{1}_{z \geq 0}$.

4. (a) Pour tout réel t , puisque les U_k sont i.i.d.,

$$\mathbb{P}(M_k \leq t) = \mathbb{P}(U_1 \leq t, \dots, U_k \leq t) = \mathbb{P}(U_1 \leq t)^k = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ t^k, & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 1, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

(b) La fonction de répartition de M_k étant continue et \mathcal{C}^1 par morceaux, M_k possède une densité p donnée par

$$p(x) = 0 \text{ si } x \leq 0, \quad p(x) = kx^{k-1} \text{ si } 0 < x < 1, \quad p(x) = 0 \text{ si } x \geq 1.$$

5. (a) Nous avons

$$\mathbb{E}[\cos(\pi U_1)] = \int_0^1 \cos(\pi u) du = \frac{1}{\pi} [\sin(\pi u)]_0^1 = 0.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{V}[\cos(\pi U_1)] = \mathbb{E}[\cos^2(\pi U_1)] = \int_0^1 \cos^2(\pi u) du = \int_0^1 \frac{1 + \cos(2\pi u)}{2} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} [\sin(2\pi u)]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

(b) D'après la loi des grands nombres,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(\pi U_k) = \mathbb{E}[\cos(\pi U_1)] = 0.$$

(c) En remarquant que

$$Z_n = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^n \cos(\pi U_k) = \sqrt{\frac{n}{\mathbb{V}[\cos(\pi U_1)]}} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(\pi U_k) - \mathbb{E}[\cos(\pi U_1)] \right),$$

le TCL donne la convergence en loi de $(Z_n)_{n \geq 1}$ vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

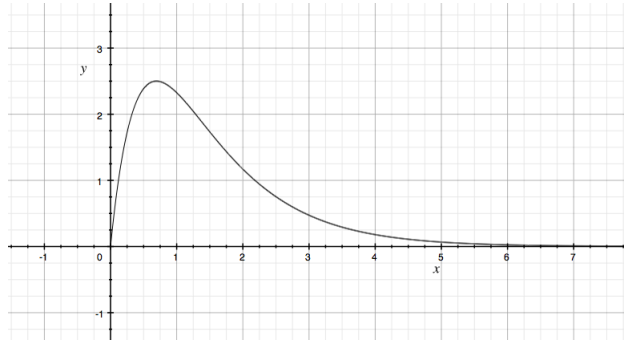
Exercice 3. 1. De façon évidente, $\mathbb{P}(X_i \geq t) = e^{-\theta t}$.

2. Les variables aléatoires $\mathbf{1}_{X_k \geq t}$ sont indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_i \geq t) = e^{-\theta t}$. Par conséquent N_t suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, e^{-\theta t})$; $\mathbb{E}[N_t] = ne^{-\theta t}$, $\mathbb{V}[N_t] = ne^{-\theta t}(1 - e^{-\theta t})$.

Notant $f(t) = \mathbb{V}[N_t]$, on a

$$\begin{aligned} f'(t) &= -n\theta e^{-\theta t} + 2n\theta e^{-2\theta t} \\ &= n\theta e^{-\theta t} (2e^{-\theta t} - 1) \end{aligned}$$

f atteint son maximum pour $t = \ln(2)/\theta$ qui vaut $n/4$. Le graphe est donné pour $\theta = 1$ et $n = 10$.



3. Si n est suffisamment grand, le TCL permet d'approcher la loi de N_t , $\mathcal{B}(n, e^{-\theta t})$, par la loi $\mathcal{N}(\mathbb{E}[N_t], \mathbb{V}[N_t]) = \mathcal{N}(ne^{-\theta t}, ne^{-\theta t}(1 - e^{-\theta t}))$.

4. En utilisant cette approximation, on obtient

$$\mathbb{P}(N_t > \alpha n) = \mathbb{P}\left(\frac{N_t - \mathbb{E}[N_t]}{\sqrt{\mathbb{V}[N_t]}} > \frac{\alpha n - \mathbb{E}[N_t]}{\sqrt{\mathbb{V}[N_t]}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{\alpha n - \mathbb{E}[N_t]}{\sqrt{\mathbb{V}[N_t]}}\right),$$

ce qui donne, comme $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$,

$$\mathbb{P}(N_t > \alpha n) \simeq 1 - \Phi\left(\sqrt{n} \frac{\alpha - e^{-\theta t}}{\sqrt{e^{-\theta t}(1 - e^{-\theta t})}}\right) = \Phi\left(\sqrt{n} \frac{e^{-\theta t} - \alpha}{\sqrt{e^{-\theta t}(1 - e^{-\theta t})}}\right).$$

Exercice 4. 1. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| \leq 1$. On a par indépendance et identique distribution des variables X_2, \dots, X_{n+2} ,

$$\mathbb{E}[z^{S_n}] = \mathbb{E}\left[\prod_{0 \leq k \leq n} z^{X_{k+2}}\right] = \prod_{0 \leq k \leq n} \mathbb{E}[z^{X_{k+2}}] = G(z)^{n+1} = e^{\lambda(n+1)(z-1)}.$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre $(n+1)\lambda$.

2. Comme les événements $\{X_1 = n\}$, $n \in \mathbf{N}$, forment une partition de Ω , nous avons

$$\mathbb{E} \left[z^S \right] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E} \left[z^S \mathbf{1}_{\{X_1 = n\}} \right] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E} \left[z^{S_n} \mathbf{1}_{\{X_1 = n\}} \right],$$

et par indépendance de X_1 et S_n (qui dépend de X_2, \dots, X_{n+2}) on a

$$\mathbb{E} \left[z^S \right] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E} \left[z^{S_n} \right] \mathbb{P}(X_1 = n) = \sum_{n \geq 0} G(z)^{n+1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = G(z) e^{\lambda(G(z)-1)}.$$