Loi d'une variable aléatoire réelle

On introduit la notion de variable aléatoire dans le cas réel ainsi que la notion fondamentale de loi d'une variable aléatoire. La première chose à préciser est que dans toute la suite nous utiliserons l'abréviation « v.a.r. » pour « variable aléatoire réelle » au singulier comme au pluriel.

1. Définitions, vocabulaire.

Commençons par la définition fondamentale suivante :

Définition. Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On appelle *variable aléatoire réelle* définie sur Ω toute application X de Ω dans $\mathbf{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}.$$

Une telle application est dite mesurable. En pratique on ne vérifie que très rarement la mesurabilité. De plus, la structure de la tribu borélienne (la plus petite tribu qui contient les intervalles) a pour conséquence qu'une variable aléatoire X vérifie

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}), \qquad X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Remarque(s). Les probabilistes utilisent généralement la notation suivante : si B est un borélien alors l'ensemble $X^{-1}(B)$ est noté en abrégé $\{X \in B\}$ soit

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\} = \{X \in B\}.$$

De même, l'ensemble $X^{-1}(]-\infty, x])$ est noté $\{X \leq x\}$ et l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ est noté $\{X = x\}$.

Introduisons à présent la loi d'une v.a.r. X.

Théorème 1. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une v.a.r. définie sur Ω. L'application $\mathbb{P}_X$ définie par*

$$\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbf{R}) \longrightarrow [0,1], \qquad B \longmapsto \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)),$$

est une mesure de probabilité sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$.

La mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ s'appelle la loi de la variable aléatoire X sous $\mathbb{P}$ ou plus simplement la loi de X.

Montrons rapidement que $\mathbb{P}_X$ ainsi définie est une mesure de probabilité sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$. On a tout d'abord, $X^{-1}(\mathbf{R}) = \Omega$, $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et par suite,

$$\mathbb{P}_X(\mathbf{R}) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(\mathbf{R})\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}_X(\emptyset) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(\emptyset)\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Si $(B_n)_{\mathbf{N}}$ est une suite de boréliens deux à deux disjoints, alors $\left(X^{-1}(B_n)\right)_{\mathbf{N}}$ est une suite de parties de $\mathcal{F}$ deux à deux disjointes. Comme $X^{-1}\left(\cup_n B_n\right) = \cup_n X^{-1}(B_n)$, on a, $\mathbb{P}$ étant une mesure de probabilité,

$$\mathbb{P}_X\left(\bigcup_n B_n\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_n X^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(X^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_X(B_n).$$

Ceci montre que $\mathbb{P}_X$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$.

La question qui se pose alors est de savoir comment décrire la loi d'une variable aléatoire réelle.

2. Fonction de répartition.

Si X est une v.a.r. sa loi $\mathbb{P}_X$ est déterminée par la valeur de $\mathbb{P}(\{X \in B\})$ pour tout borélien B. Toutefois, comme nous allons le voir il suffit en fait de connaître la valeur de $\mathbb{P}(\{X \leq x\})$ pour tout réel x pour caractériser la loi de X. Ceci justifie la définition suivante :

Définition. Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle *fonction de répartition* de X, notée F (ou F_X si besoin), la fonction suivante :

$$F : \mathbf{R} \longrightarrow [0,1], \qquad x \longmapsto F(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}).$$

La terminologie « fonction de répartition de X » est un peu impropre car en fait F dépend de la mesure $\mathbb{P}_X$ et pas directement de X. Un des intérêts de la fonction de répartition est quelle permet d'exprimer $\mathbb{P}(\{X \in I\})$ pour tout intervalle réel I. C'est l'objet du résultat qui suit.

Proposition 2. *Soient X une v.a.r. et F sa fonction de répartition. Alors,*

1. *F est croissante ;*
2. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ *;*
3. *F est continue à droite et possède des limites à gauche ;*
4. *si a et b sont deux réels tels que $a < b$, on a notant $F(x^-) = \lim_{t\to x^-} F(t)$,*
   (a) $\mathbb{P}(\{X \leq a\}) = \mathbb{P}_X(]-\infty, a]) = F(a)$ *;*
   (b) $\mathbb{P}(\{a < X \leq b\}) = \mathbb{P}_X(]a, b]) = F(b) - F(a)$ *;*
   (c) $\mathbb{P}(\{X = b\}) = \mathbb{P}_X(\{b\}) = F(b) - F(b^-)$ *;*
   (d) $\mathbb{P}(\{a \leq X \leq b\}) = \mathbb{P}_X([a, b]) = F(b) - F(a^-)$ *;*
   (e) $\mathbb{P}(\{a < X < b\}) = \mathbb{P}_X(]a, b[) = F(b^-) - F(a)$ *;*
   (f) $\mathbb{P}(\{a \leq X < b\}) = \mathbb{P}_X([a, b[) = F(b^-) - F(a^-)$ *;*
   (g) $\mathbb{P}(\{X < a\}) = \mathbb{P}_X(]-\infty, a[) = F(a^-)$.

La preuve de ce résultat n'est pas très difficile et repose sur les propriétés de montonie des mesures de probabilité ; faisons-la partiellement. La croissance de F est évidente. Il s'en suit – c'est un bon exercice d'analyse sur les bornes sup – que F possède des limites à droite et à gauche en tout point. La continuité à droite s'obtient en écrivant que $]-\infty, x] = \cap_{n\geq1}]-\infty, x+1/n]$ et en utilisant le fait que la probabilité de l'intersection d'une suite décroissante $(A_n)_{\mathbf{N}}$ est la limite des probabilités des A_n ; en effet,

$$F(x) = \mathbb{P}_X\left(\cap_n]-\infty, x+1/n]\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_X(]-\infty, x+1/n]) = \lim_{n\to\infty} F(x+1/n).$$

Les limites résultent respectivement de $\emptyset = \cap_{n\geq1}]-\infty, -n]$ et $\mathbf{R} = \cup_{n\geq1}]-\infty, n]$. On obtient $\mathbb{P}_X(]a, b]) = F(b) - F(a)$ en écrivant $]-\infty, b] =]-\infty, a] \cup]a, b]$. En remarquant que, pour tout réel x, $\{x\} = \cap_{n\geq1}]x-1/n, x]$, on a, si x est réel, $\mathbb{P}_X(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_X(]x-1/n, x]) = F(x) - F(x^-)$. Les autres assertions sont alors immédiates : par exemple, si on écrit $]a, b] =]a, b[\cup \{b\}$, on obtient

$$\mathbb{P}_X(]a, b]) = \mathbb{P}_X(]a, b[) + \mathbb{P}_X(\{b\}), \qquad \text{soit}, \qquad F(b) - F(a) = \mathbb{P}_X(]a, b[) + F(b) - F(b^-),$$

d'où l'on déduit immédiatement que $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}_X(]a, b[) = F(b^-) - F(a)$.

Une conséquence de ce résultat est que, F est continue en un point x si et seulement si $\mathbb{P}_X(\{x\}) = 0$. Notons également que comme F est croissante, ses points de discontinuité forment un ensemble au plus dénombrable.

Exemple. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F donnée par, $[x]$ désignant la partie entière de x,

$$F(x) = \frac{1}{5}\exp(x-1),\ \text{si } x < 1, \quad F(x) = \frac{1}{4}[x],\ \text{si } 1 \leq x < 3, \quad F(x) = 1 - \frac{1}{2x},\ \text{sinon.}$$

On obtient facilement les probabilités suivantes (un dessin de F aide beaucoup),

$$\mathbb{P}(\{X = 0\}) = 0, \qquad \mathbb{P}(\{X = 2\}) = F(2) - F(2^-) = 1/2 - 1/4 = 1/4,$$

de même que, notant que $F(3) = 5/6$, $F(1) = 1/4$ et $F(1^-) = 1/5$,

$$\mathbb{P}(\{1 < X \leq 3\}) = F(3) - F(1) = 7/12, \qquad \mathbb{P}(\{1 \leq X \leq 3\}) = F(3) - F(1^-) = 19/30.$$

Nous en venons à un résultat très profond, qui dépasse le cadre de ce cours. Il montre en fait que la loi d'une v.a.r. est entièrement caractérisée par sa fonction de répartition.

Théorème 3. *La loi $\mathbb{P}_X$ d'une variable aléatoire réelle X est entièrement déterminée par sa fonction de répartition F.*

Plus précisément, si $F : \mathbf{R} \longrightarrow [0,1]$ est une fonction croissante, continue à droite vérifiant de plus $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, il existe une unique probabilité μ sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \mu(]-\infty, x]) = F(x).$$

Remarque(s). 1. Plus généralement, on appelle *fonction de répartition* toute fonction $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ croissante, continue à droite vérifiant $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Étant donné une fonction de répartition F, il existe toujours une (en fait plusieurs) variable aléatoire dont la fonction de répartition F_X est égale à F.

2. On déduit notamment de ce théorème qu'une probabilité μ sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ est caractérisée par $\mu(I)$ pour I intervalle.

Exemple. Soit F la fonction définie par $F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = x$ si $0 \leq x < 1$, $F(x) = 1$ si $x \geq 1$. D'après le résultat précédent, il existe une unique mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$ de fonction de répartition F. On appelle cette probabilité la loi uniforme sur $[0,1]$ et on la note parfois m. Elle modélise le fait de tirer un nombre au hasard dans $[0,1]$.

Nous allons à présent nous intéresser à deux types particuliers de v.a.r. : les variables aléatoires discrètes d'une part et d'autre part les variables aléatoires absolument continues.

3. Variables discrètes.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω.

Définition. X est une variable aléatoire discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ est au plus dénombrable c'est à dire fini ou dénombrable.

Remarque(s). $X(\Omega)$ représente l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X. Pour une variable discrète, notant, pour $x \in X(\Omega)$, $p_x = \mathbb{P}(\{X = x\})$ on doit avoir $\sum_{x\in X(\Omega)} p_x = 1$.

Exemple. Imaginons que l'on lance un dé plusieurs fois de suite.

Si X représente le résultat du premier lancer, $X(\Omega) = \{1, \ldots, 6\}$ et $p_1 = \ldots = p_6 = 1/6$.

Si X représente à présent le premier lancer pour lequel on obtient 1, alors $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et pour $k \in \mathbf{N}^*$, $p_k = \mathbb{P}(\{X = k\}) = (5/6)^{k-1}(1/6)$.

Nous allons voir que la loi d'une v.a.r. discrète est relativement simple à caractériser. Tout d'abord, pour x réel déterminons l'ensemble $\{X \leq x\}$. Nous avons

$$\{X \leq x\} = \{X \leq x\} \cap \{X \in X(\Omega)\} = \bigcup_{y \in X(\Omega)} \{X \leq x\} \cap \{X = y\} = \bigcup_{y \in X(\Omega): y \leq x} \{X = y\}.$$

Puisque X est une variable aléatoire discrète, l'ensemble $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable. On déduit de cette égalité ensembliste deux choses : tout d'abord, X est mesurable si et seulement si les ensembles $\{X = y\}$ appartiennent à $\mathcal{F}$ pour tout $y \in X(\Omega)$; et d'autre part, en utilisant la σ–additivité de la probabilité $\mathbb{P}$,

$$F(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{y \in X(\Omega): y \leq x} \{X = y\}\right) = \sum_{y \in X(\Omega): y \leq x} p_y = \sum_{y \in X(\Omega)} p_y \, \mathbf{1}_{y \leq x}.$$

On voit alors que la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X – et par suite sa loi – est entièrement déterminée par les réels $p_x = \mathbb{P}(\{X = x\})$, $x \in X(\Omega)$. On obtient donc le résultat suivant :

Théorème 4. *Soit X une v.a.r. discrète. La loi de X est complètement déterminée par les valeurs*

$$p_x = \mathbb{P}(\{X = x\}) = \mathbb{P}_X(\{x\}), \quad x \in X(\Omega).$$

Plus précisément, on a pour tout ensemble borélien B,

$$\mathbb{P}(\{X \in B\}) = \sum_{x \in X(\Omega): x \in B} p_x = \sum_{x \in X(\Omega)} p_x \, \mathbf{1}_B(x).$$

La dernière égalité signifie simplement que $\mathbb{P}(\{X \in B\})$ s'obtient en faisant la somme des p_x sur les valeurs x de $X(\Omega)$ qui appartiennent à B.

Pour une variable discrète, quelle allure à le graphe de sa fonction de répartition F ? Nous avons déjà dit, avec les notations du théorème précédent, que $F(x) = \sum_{y \in X(\Omega)} p_x \, \mathbf{1}_{y \leq x}$. Si on suppose que $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \ldots\}$ avec $x_0 < x_1 < \ldots$, on a pour $x < x_0$, $F(x) = 0$, puis pour $x \in [x_0, x_1[$, $F(x) = p_0$, puis sur $[x_1, x_2[$, $F(x) = p_0 + p_1 \ldots F$ est donc une fonction constante par morceaux.

Exemple. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs -2, 1, 2 avec probabilité respectives $\mathbb{P}(X = -2) = 1/3$, $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X = 2) = 1/6$. La fonction de répartition de X est donnée par

$$F(x) = 0 \text{ si } x < -2, \quad F(x) = \frac{1}{3} \text{ si } x \in [-2, 1[, \quad F(x) = \frac{5}{6} \text{ si } x \in [1, 2[, \quad F(x) = 1 \text{ sinon.}$$

Finissons ce paragraphe en précisant les lois de quelques variables aléatoires discrètes que nous utiliserons par la suite.

Loi uniforme sur $\{x_1, \ldots, x_N\}$: pour tout $i = 1, \ldots, N$, $\mathbb{P}(\{X = x_i\}) = 1/N$. Les expériences aléatoires correspondant à cette situation ne manquent pas : dé équilibré, tirer une carte au hasard, pile ou face avec une pièce non truquée ...

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: on se donne $p \in [0,1]$ et $\mathbb{P}(\{X=1\}) = p$, $\mathbb{P}(\{X=0\}) = q = 1-p$. Les exemples sont là encore nombreux : sexe d'un enfant à naître, pile ou face truqué, ...

Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: on fixe $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in [0,1]$. X prend les valeurs $0,\ldots,n$ et pour tout $k=0,\ldots,n$, on pose $\mathbb{P}(X=k) = \mathrm{C}_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}$. L'expérience aléatoire correspondante est la suivante : on a une épreuve de base (par exemple obtenir pile) qui est réussie avec probabilité p ; on répète n fois l'expérience de façon indépendante et X représente le nombre de succès.

Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$: $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$, $p \in]0,1[$. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$. On répète de façon indépendante, un pile ou face truqué qui donne pile avec probabilité p. X représente alors le premier instant où l'on obtient pile.

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: $X(\Omega) = \mathbf{N}$, $\lambda > 0$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$.

Loi binomiale négative $\mathcal{B}_-(n,p)$: on a $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $X(\Omega) = \{n, n+1, n+2, \cdots\}$ et on définit pour $k \geq n$, $\mathbb{P}(X=k) = \mathrm{C}_{k-1}^{n-1}\, p^n(1-p)^{k-n}$. L'expérience est la suivante : on lance une pièce donnant pile avec probabilité p de façon indépendante. X représente le premier instant où l'on obtient n fois pile.

Exercice. Montrer que les différentes lois $\mathbb{P}_X$ ainsi définies sont bien des probabilités.

4. Variables absolument continues.

Dans ce paragraphe, on considère le cas des variables aléatoires réelles absolument continues ; commençons par une définition.

Définition. Soit $p : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. p est une densité de probabilité si

(i) p est positive ;

(ii) p est intégrable et $\int_{\mathbf{R}} p(t)\,dt = 1$.

En toute rigueur, il faudrait donner un sens précis au mot « intégrable ». Disons simplement, que cette notion d'intégrabilité – qui comprend entre autre le fait que p est borélienne c'est à dire que pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\{x \in \mathbf{R},\ p(x) \leq a\} \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ – correspond avec la notion classique d'intégrabilité lorsque p est, par exemple, continue par morceaux.

Exercice. Vérifier que la fonction $p(x) = \exp(-|x|)/2$ est une densité de probabilité.

Définition. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. On dit que X est absolument continue s'il existe une densité de probabilité p telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt.$$

Dans ce cas, on dit que X a pour densité p ou encore que p est une densité de X.

Si X est absolument continue de densité p, on a pour tout intervalle, toute réunion d'intervalles (et même tout borélien) B,

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B p(t)\,dt\ ;$$

en particulier, si la variable aléatoire X a pour densité p alors sa fonction de répartition est donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt.$$

La question qui se pose à présent est la suivante : comment reconnaître qu'une v.a.r. X possède une densité ? Voici un résultat qui précise les liens entre fonction de répartition et densité de probabilité.

Théorème 5. *Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F.*

1. *Si X possède une densité, alors F est continue et donc $\mathbb{P}(\{X = x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.*
2. *Si F est continue et C^1 par morceaux alors X possède une densité et la fonction p définie par $p(x) = F'(x)$ si F est dérivable au point x et $p(x) = 0$ sinon en est une.*

On finit ce paragraphe en donnant les densités de quelques variables aléatoires absolument continues.

Loi uniforme sur $[a, b]$, $\mathcal{U}(a, b)$: X de densité $p(x) = (b - a)^{-1}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$;

Loi de Cauchy : X de densité $p(x) = 1/(\pi(1 + x^2))$;

Loi de Laplace : X de densité $p(x) = e^{-|x|}/2$;

Loi exponentielle, $\mathcal{E}xp(\lambda)$, $\lambda > 0$: X de densité $p(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\mathbf{1}_{x\geq 0}$;

Loi de Gauss, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: on dit aussi gaussienne de moyenne μ et de variance $\sigma^2 > 0$. X de densité $p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\right)$. Lorsque $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$, on dit loi normale centrée réduite.

Exercice. Vérifier que les fonctions précédentes sont des densités de probabilité et calculer les fonctions de répartition associées pour les quatre premières.

5. Calcul de loi.

Le problème est le suivant : X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de loi $\mathbb{P}_X$ connue. Soit u une fonction (borélienne) de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie au moins sur $X(\Omega)$. On veut déterminer la loi $\mathbb{P}_Y$ de la v.a. $Y = u(X)$.

Dans un tel problème, la première chose à faire est de déterminer la nature de la variable Y. Par nature, il faut entendre Y est une variable aléatoire discrète ou pas ce qui correspond à $Y(\Omega)$ fini ou dénombrable ou pas.

5.1. Y discrète.

Pour caractériser $\mathbb{P}_Y$, on doit calculer $\mathbb{P}_Y(\{y\})$ pour tout $y \in Y(\Omega)$. Il faut donc trouver $u^{-1}(\{y\})$ pour tout $y \in Y(\Omega)$ puisque

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}_Y(\{y\}) = \mathbb{P}(\{Y = y\}) = \mathbb{P}(\{u(X) = y\}) = \mathbb{P}\left(\left\{X \in u^{-1}(\{y\})\right\}\right) = \mathbb{P}_X\left(u^{-1}(\{y\})\right).$$

Exemple. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbf{Z}^*$ de loi donnée par $\mathbb{P}(X = n) = 2^{-(1+|n|)}$ pour $n \in \mathbf{Z}^*$. Quelle est la loi de la v.a. $Y = |X|$?

Y est à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ et de plus pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(X = \pm n) = \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X = -n) = 2^{-n}.$$

Y suit une loi géométrique de paramètre $1/2$.

Exemple. Soit X une v.a. suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la loi de $Y = [10X]$ ($[x]$ désigne la partie entière de x) ?

Y est à valeurs dans $E' = \{0, 1, \dots, 9\}$. De plus, si $k \in E'$, on a

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(10X \in [k, k+1[) = \mathbb{P}(X \in [k/10, k/10 + 1/10[) = 1/10.$$

On en déduit que Y suit la loi uniforme sur E'.

5.2. Y n'est pas discrète.

On connaît la probabilité $\mathbb{P}_X$, au travers de sa fonction de répartition F_X ou d'une densité p_X, et on cherche la fonction de répartition de $Y = u(X)$. Pour y réel, on a

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(\{Y \le y\}) = \mathbb{P}(u(X) \in]-\infty, y]) = \mathbb{P}\left(X \in u^{-1}(]-\infty, y])\right) = \mathbb{P}_X\left(u^{-1}(]-\infty, y])\right) \ ;$$

on détermine ensuite l'ensemble $u^{-1}(]-\infty, y])$ et on obtient la probabilité requise.

Exemple. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{E}xp(\lambda)$, $\lambda > 0$; rappelons que $F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ si $x \ge 0$ et $F_X(x) = 0$ dès que $x < 0$. Considérons $Y = \min(X, 1)$ qui correspond à la fonction $u(x) = \min(x, 1)$.

On a $u^{-1}(]-\infty, y]) =]-\infty, y]$ si $y < 1$ et $u^{-1}(]-\infty, y]) = \mathbf{R}$ si $y \ge 1$. Il vient alors, $F_Y(y) = 0$ si $y < 0$, $F_Y(y) = 1$ si $y \ge 1$ et

$$\forall y \in [0, 1[, \qquad F_Y(y) = F_X(y) = 1 - \exp(-\lambda y).$$

On peut noter que Y n'est pas absolument continue puisque F_Y n'est pas continue au point 1.

Exemple. Soit X une v.a. uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$. On considère $Y = \tan(X)$. tan est une fonction strictement croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbf{R}$. Si $y \in \mathbf{R}$, comme X est dans $]-\pi/2, \pi/2[$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(\tan(X) \le y) = \mathbb{P}(X \le \arctan y) = F_X(\arctan y).$$

Il vient alors, pour tout réel y,

$$F_Y(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\arctan y} \mathbf{1}_{[-\pi/2, \pi/2]}(x)\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan y.$$

Y suit la loi de Cauchy.

6. Variables indépendantes.

Avant de donner une définition plus générale, regardons le cas de deux variables aléatoires. Soient X et Y deux v.a.r. définies sur le même espace probabilisé. X et Y sont indépendantes si

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R}, \qquad \mathbb{P}(X \le x,\ Y \le y) = \mathbb{P}(X \le x)\, \mathbb{P}(Y \le y) = F_X(x)\, F_Y(y).$$

Cette définition se généralise comme suit :

Définition. Soient $(X_i)_{1 \le i \le n}$ n variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé. Les v.a. $(X_i)_{1 \le i \le n}$ sont indépendantes si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \qquad \mathbb{P}(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \le x_i). \tag{1}$$

Remarque(s). Dès que l'une des v.a. est discrète, disons X_1, on peut remplacer dans la condition (1) « $X_1 \leq x_1$ » par « $X_1 = x_1$ » pour chacune des valeurs x_1 que prend X_1.

De plus, si $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des variables indépendantes alors on a

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in B_i)$$

pour B_i intervalle, réunion d'intervalles et même borélien.

Pour finir, signalons qu'une suite de v.a. $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est dite indépendante (ou une suite de v.a. indépendantes) si, pour tout n, $(X_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont $n+1$ v.a. indépendantes.