Couples aléatoires

Au chapitre précédent, nous avons étudié les variables aléatoires réelles c'est à dire les variables aléatoires prenant leurs valeurs dans $\mathbf{R}$. Dans cette partie du cours, on va considérer le cas de vecteurs aléatoires c'est à dire des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ où $d \in \mathbf{N}^*$. Pour simplifier l'exposé, nous considérerons seulement le cas de la dimension $d = 2$. Une vecteur aléatoire Z de $\mathbf{R}^2$ sera décrit dans la suite par son abscisse X et son ordonnée Y i.e. $Z = (X, Y)$. On utilise aussi le terme « couple aléatoire » pour un vecteur aléatoire de dimension 2.

1. Loi d'un couple aléatoire.

On va s'intéresser à la loi $\mathbb{P}_Z$ d'un couple de v.a.r. $Z = (X, Y)$. On pourrait penser que si l'on connaît la loi de chacune des v.a.r. X et Y alors on connaît la loi du couple ; mais la situation est plus complexe.

1.1. Un exemple.

Considérons un couple aléatoire Z ne prenant que quatre valeurs $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$. On a, alors,

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left[Z=(0,0)\right] + \mathbb{P}\left[Z=(0,1)\right], \quad \mathbb{P}(X=1) = 1 - \mathbb{P}(X=0),$$
$$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}\left[Z=(0,0)\right] + \mathbb{P}\left[Z=(1,0)\right], \quad \mathbb{P}(Y=1) = 1 - \mathbb{P}(Y=0).$$

Supposons tout d'abord que Z suit la loi uniforme c'est à dire

$$\mathbb{P}\left[Z=(0,0)\right] = \mathbb{P}\left[Z=(0,1)\right] = \mathbb{P}\left[Z=(1,0)\right] = \mathbb{P}\left[Z=(1,1)\right] = 1/4.$$

On a, dans ce cas

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=1) = 1/2, \qquad \mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(Y=1) = 1/2.$$

Si à présent, on suppose que

$$\mathbb{P}\left[Z=(0,0)\right] = 1/8, \quad \mathbb{P}\left[Z=(0,1)\right] = 3/8, \quad \mathbb{P}\left[Z=(1,0)\right] = 3/8, \quad \mathbb{P}\left[Z=(1,1)\right] = 1/8,$$

on obtient toujours

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=1) = 1/2, \qquad \mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(Y=1) = 1/2.$$

Dans les deux cas que l'on vient de considérer, la loi de X et Y est la loi uniforme sur $\{0,1\}$ et pourtant la loi de $Z = (X, Y)$ n'est pas la même dans le premier et dans le second cas.

Deux enseignements semblent se dégager de cet exemple : tout d'abord si on connaît la loi du vecteur $Z = (X, Y)$, on peut déterminer celle des v.a. X et Y. Par contre la connaissance de la loi de X et de la loi de Y ne permet pas de déterminer la loi du vecteur $Z = (X, Y)$ en général.

1.2. Vocabulaire.

Donnons à présent les définitions précises relatives aux couples aléatoires ; ces définitions généralisent celles concernant les variables aléatoires réelles.

Définition. On appelle *couple aléatoire* – ou vecteur aléatoire de dimension deux – toute paire $Z = (X, Y)$ de variables aléatoires réelles. On a donc :

$$Z : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow \mathbf{R}^2, \qquad \omega \longmapsto Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))\,.$$

Sur $\mathbf{R}$, nous avons considéré la plus petite tribu engendrée par les intervalles i.e. la tribu borélienne. Pour travailler dans $\mathbf{R}^2$, on introduit la *tribu borélienne de* $\mathbf{R}^2$, $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$, qui est « la plus petite tribu » sur $\mathbf{R}^2$ contenant tous les pavés $I \times J$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbf{R}$. Cette tribu contient tous les pavés du type $A \times B$ où A et B sont deux boréliens de $\mathbf{R}$ mais elle contient également des ensembles beaucoup plus complexes qui ne sont pas des produits cartésiens.

Si Z est un couple aléatoire, on montre que pour tout borélien C de $\mathbf{R}^2$, l'image réciproque de C par Z, $Z^{-1}(C) = \{\omega \in \Omega,\ Z(\omega) \in C\}$, est un élément de $\mathcal{F}$. Ceci donne un sens à la définition suivante.

Définition. Soit $Z : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^2$ un couple aléatoire. L'application $\mathbb{P}_Z$ définie par

$$\mathbb{P}_Z : \mathcal{B}(\mathbf{R}^2) \longrightarrow [0, 1], \qquad C \longmapsto \mathbb{P}_Z(C) = \mathbb{P}\left(Z^{-1}(C)\right)$$

est une mesure de probabilité appelée loi de Z.

Remarque(s). Si C est un borélien de $\mathbf{R}^2$ et $Z = (X, Y)$ un couple aléatoire, l'ensemble $Z^{-1}(C)$, noté $\{Z \in C\}$ par les probabilistes, n'est pas toujours très facile à déterminer. Néanmoins, si C est le pavé $A \times B$ la situation est plus favorable ; en effet, on a dans ce cas

$$Z^{-1}(C) = \{\omega \in \Omega,\ (X(\omega), Y(\omega)) \in A \times B\} = X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B),$$

soit encore $\{Z \in A \times B\} = \{X \in A,\ Y \in B\}$.

La tribu des boréliens de $\mathbf{R}^2$ contient des parties complexes ; toutefois, elle est engendrée par la classe des produits d'intervalles réels, ce qui conduit au résultat suivant :

Proposition 1. *Soit $Z = (X, Y)$ un couple aléatoire. La loi $\mathbb{P}_Z$ est caractérisée par*

$$\mathbb{P}_Z(I \times J) = \mathbb{P}(X \in I,\ Y \in J),$$

pour tout couple (I, J) d'intervalles réels.

Lois marginales du couple. Si $Z = (X, Y)$ est un couple aléatoire, les lois marginales de Z sont les lois des v.a.r. X et Y. Il est important de noter que si on connaît la loi du couple $\mathbb{P}_Z$ on connaît les lois marginales. En effet, si A est un intervalle, une réunion d'intervalles ou un borélien de $\mathbf{R}$,

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in A,\ Y \in \mathbf{R}) = \mathbb{P}_Z(A \times \mathbf{R}),$$

de même, pour la v.a.r. Y,

$$\mathbb{P}_Y(B) = \mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(X \in \mathbf{R},\ Y \in B) = \mathbb{P}_Z(\mathbf{R} \times B).$$

2. Le cas discret.

Nous examinons à présent le cas où Z est une couple aléatoire discret : X et Y sont donc deux v.a.r. discrètes prenant respectivement les valeurs $\{x_i,\ i \in \mathbf{N}\}$ et $\{y_n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Remarquons que Z prend les valeurs $\{(x_i, y_n),\ (i, n) \in \mathbf{N}^2\}$ et que l'on note, si i et n sont deux entiers, $p_{i,n} = \mathbb{P}[Z = (x_i, y_n)]$.

On peut faire, dans le cas d'un couple Z, le même raisonnement que dans le cas d'une variable aléatoire réelle, et montrer que la loi de Z est entièrement déterminée par les valeurs $p_{i,n}$ pour i et n entiers naturels. En fait, si C est un borélien de $\mathbf{R}^2$, on a :

$$\mathbb{P}(Z \in C) = \sum_{i,n \geq 0} \mathbb{P}[Z = (x_i, y_n)]\ \mathbf{1}_C(x_i, y_n) = \sum_{i,n \geq 0} p_{i,n}\, \mathbf{1}_C(x_i, y_n).$$

Ceci signifie que la probabilité que Z appartienne à C s'obtient en sommant les $p_{i,n}$ sur les indices i et n pour lesquels (x_i, y_n) appartient à C.

Pour déterminer les lois marginales de Z, il suffit de calculer $\mathbb{P}(X = x_i)$ pour tout entier i et $\mathbb{P}(Y = y_n)$ pour tout entier n. Mais on a, pour tout $i \in \mathbf{N}$,

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X = x_i,\ Y \in \mathbf{R}) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = x_i,\ Y = y_n) = \sum_{n \geq 0} p_{i,n},$$

et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = y_n) = \mathbb{P}(X \in \mathbf{R},\ Y = y_n) = \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}(X = x_i,\ Y = y_n) = \sum_{i \geq 0} p_{i,n}.$$

Donnons un exemple de calcul de marginales à partir de la loi du couple.

Exemple. Soient $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $p, q \in]0,1[$ tels que $p + q = 1$. Soit $Z = (X, Y)$ le vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ de loi donnée par :

$$\forall (i, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X = i,\ Y = n) = \begin{cases} e^{-\lambda}\, \dfrac{\lambda^i}{i!}\, p^2 (1-p)^k & \text{si } n = 2k+1, \\[2ex] e^{-\mu}\, \dfrac{\mu^i}{i!}\, q^2 (1-q)^k & \text{si } n = 2k+2. \end{cases}$$

Déterminons les marginales de Z. Commençons par la loi de Y ; pour $k \in \mathbf{N}$, on a

$$\mathbb{P}(Y = 2k+1) = \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}(X = i,\ Y = 2k+1) = \sum_{i \geq 0} e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^i}{i!}\, p^2 (1-p)^k = p^2 (1-p)^k,$$

$$\mathbb{P}(Y = 2k+2) = \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}(X = i,\ Y = 2k+2) = \sum_{i \geq 0} e^{-\mu}\, \frac{\mu^i}{i!}\, q^2 (1-q)^k = q^2 (1-q)^k.$$

Pour la loi de X, soit $i \in \mathbf{N}$,

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X = i,\ Y = n) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X = i,\ Y = 2k+1) + \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X = i,\ Y = 2k+2),$$

et l'on a, utilisant le fait que $\sum_{k \geq 0} (1-x)^k = 1/x$ si $0 < x < 1$,

$$\mathbb{P}(X = i) = p\, e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^i}{i!} + q\, e^{-\mu}\, \frac{\mu^i}{i!}.$$

Indépendance. Comme on l'a vu dans l'exemple introductif, on ne peut pas en général, trouver la loi du couple si on connaît seulement les lois marginales. Toutefois, il y a un cas très particulier pour lequel on peut reconstruire la loi de $Z = (X, Y)$ à partir des lois de X et Y : celui de l'indépendance. Rappelons que deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall (i,n) \in \mathbf{N}^2, \qquad \mathbb{P}(X = x_i,\, Y = y_n) = \mathbb{P}(X = x_i)\, \mathbb{P}(Y = y_n).$$

La formule précédente peut se lire de la façon suivante : X et Y sont deux v.a.r. discrètes indépendantes si et seulement si la loi du couple $Z = (X, Y)$ est donnée par

$$\forall (i,n) \in \mathbf{N}^2, \qquad p_{i,n} = \mathbb{P}\left(Z = (x_i, y_n)\right) = \mathbb{P}(X = x_i)\, \mathbb{P}(Y = y_n).$$

Remarque(s). En pratique, on connaît la loi du couple Z au travers des $p_{i,n}$ et on se demande si les v.a. X et Y sont indépendantes. Pour cela, il suffit de vérifier que l'on peut séparer les variables dans $p_{i,n}$ c'est à dire écrire $p_{i,n} = u_i\, v_n$ pour tout (i, n) ; on n'a pas besoin de déterminer les marginales.

La dernière chose à mentionner pour les couples discrets est la manière de calculer l'espérance de variables réelles construites à partir du couple Z.

Proposition 2. *Soient $Z = (X, Y)$ un couple discret et $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Si la somme double $\sum_{i,n\geq 0} |f(x_i, y_n)|\, p_{i,n}$ est finie alors la v.a.r. $f(X, Y)$ est intégrable et*

$$\mathbb{E}\left[f(X,Y)\right] = \sum_{i,n\geq 0} f(x_i, y_n)\, \mathbb{P}\left(Z = (x_i, y_n)\right) = \sum_{i,n\geq 0} f(x_i, y_n)\, p_{i,n}.$$

3. Couple possédant une densité.

Dans ce paragraphe, on se concentre sur le cas d'un vecteur aléatoire $Z = (X, Y)$ possédant une densité. Avant de définir ce qu'est une densité de probabilité dans le cas d'un couple, on présente deux résultats sur les intégrales doubles.

3.1. Intégrales sur $\mathbf{R}^2$.

Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On aimerait répondre aux questions suivantes : à quelles conditions peut on dire que f est intégrable sur $\mathbf{R}^2$? Comment calculer dans ce cas l'intégrale ? Les intégrales itérées sont-elles égales ? Plus précisément, comment calculer

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\, dxdy, \qquad \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x,y) dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x,y) dx \right) dy \text{ ?}$$

Nous verrons au paragraphe suivant que – comme dans le cas des séries doubles – la situation la plus favorable est celle où f est positive.

Comme dans le cas de fonctions réelles, l'intégrabilité de f sous-entend que, pour tout réel a, l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}^2,\ f(x) \leq a\}$ appartient à la tribu borélienne de $\mathbf{R}^2$: on dit que f est borélienne. En pratique, on ne s'attarde pas trop sur ce point et on utilise souvent le fait que si la fonction f est continue sauf sur un ensemble au plus dénombrable ou même en dehors d'un ensemble tel que le bord d'un cercle, une droite c'est à dire en dehors d'un ensemble « d'aire nulle »– on dit négligeable – alors f est borélienne.

Exemple. La fonction définie par $f(x,y) = 1$ si $x^2 + y^2 < 1$ et 0 sinon est continue sur $\mathbf{R}^2$ privé du cercle unité qui est négligeable. f est donc borélienne.

Passons à présent au théorème de Tonelli qui concerne les fonctions positives.

Théorème 3. *Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction borélienne et positive. Notons I_1 et I_2 les intégrales itérées i.e.*

$$I_1 = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\, dx \right) dy \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

On a l'alternative suivante :

- *ou bien I_1 et I_2 valent toutes les deux $+\infty$,*
- *ou bien I_1 et I_2 sont toutes les deux finies et égales.*

On retient ce résultat sous la forme suivante : si f est une fonction positive alors on a toujours, en tolérant la valeur $+\infty$,

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Le théorème de Tonelli conduit à la définition suivante :

Définition. Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. f est intégrable sur $\mathbf{R}^2$ si f est borélienne et

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x,y)|\ dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x,y)|\ dx \right) dy < +\infty.$$

Nous passons à présent au théorème de Fubini, analogue du théorème de Tonelli pour les fonctions qui ne sont pas de signe constant.

Théorème 4. *Si $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction intégrable alors*

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Dans ce cas, on appelle intégrale de f sur $\mathbf{R}^2$ (ou intégrale double) la quantité

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\, dxdy = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Si D est un borélien de $\mathbf{R}^2$ et f une fonction intégrable, on pose

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{\mathbf{R}^2} \mathbf{1}_D(x,y)\, f(x,y)\, dxdy.$$

Exemple. Donnons un premier exemple. Soit D un borélien borné de $\mathbf{R}^2$ et $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction borélienne bornée sur D. Alors $g(x,y) = \mathbf{1}_D(x,y)\, f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^2$. En effet, il existe $a > 0$, $M > 0$ tels que $D \subset [-a,a]^2$ et $|f(x)| \leq M$ si $x \in D$ et on a

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} \big|g(x,y)\big|\, dy \right) dx \leq \int_{-a}^{a} \left(\int_{-a}^{a} M\, dy \right) dx = 4a^2 M,$$

qui est finie ; donc g est intégrable. Ce calcul s'applique en particulier au cas d'une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$.

3.2. Densité d'un couple aléatoire.

Donnons maintenant la définition d'un couple aléatoire possédant une densité. Tout d'abord, comme dans le cas réel, on a la définition suivante.

Définition. Soit $p : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. p est une densité de probabilité sur $\mathbf{R}^2$ si

(i) p est positive ;

(ii) p est intégrable sur $\mathbf{R}^2$ et $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} p(x,y)\,dxdy = 1$.

Définition. Soient $Z = (X,Y)$ un couple aléatoire et p une densité de probabilité sur $\mathbf{R}^2$. Z a pour densité p si, pour tout couple (I,J) d'intervalles de $\mathbf{R}$,

$$\mathbb{P}_Z(I \times J) = \mathbb{P}(X \in I,\, Y \in J) = \iint_{I\times J} p(x,y)\,dxdy = \iint_{\mathbf{R}^2} \mathbf{1}_I(x)\mathbf{1}_J(y)\,p(x,y)\,dxdy.$$

Remarquons que cette définition caractérise bien la loi du couple Z puisque d'après la Proposition 1 il suffit de spécifier $\mathbb{P}(Z \in I \times J)$ pour le faire.

Exemple. Soit p la fonction définie par

$$p(x,y) = c\,e^{-x}\,\mathbf{1}_{|y|\leq x}. \qquad (*)$$

Calculons c de sorte que p soit une densité de probabilité. p est positive dès que c est positive ; on se place dans ce cas. On a de plus

$$\iint_{\mathbf{R}^2} p(x,y)\,dxdy = c\int_{y\in\mathbf{R}}\int_{x\in\mathbf{R}} e^{-x}\mathbf{1}_{|y|\leq x}\,dx\,dy = c\int_{y\in\mathbf{R}}\int_{|y|}^{+\infty} e^{-x}\,dx\,dy = c\int_{\mathbf{R}} e^{-|y|}\,dy = 2c.$$

Il faut donc prendre $c = 1/2$ pour que p soit une densité de probabilité.

Nous conserverons cet exemple tout au long de ce paragraphe.

Théorème 5. *Soient $Z = (X,Y)$ un couple aléatoire de densité p, $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction borélienne. Si la fonction $f\,p$ est intégrable sur $\mathbf{R}^2$ i.e. $\iint_{\mathbf{R}^2} |f(x,y)|\,p(x,y)\,dxdy < +\infty$ alors la v.a. réelle $f(X,Y)$ est intégrable et dans ce cas,*

$$\mathbb{E}\left[f(X,Y)\right] = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,p(x,y)\,dxdy.$$

En particulier, pour tout borélien D de $\mathbf{R}^2$,

$$\mathbb{P}\left[(X,Y) \in D\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_D\left((X,Y)\right)\right] = \iint_D p(x,y)\,dxdy.$$

Exemple. Reprenons l'exemple $(*)$ et calculons l'espérance de Y.

$$\mathbb{E}[Y] = \iint_{\mathbf{R}^2} y\,p(x,y)\,dxdy = c\int_{y\in\mathbf{R}} y\int_{x\in\mathbf{R}} e^{-x}\mathbf{1}_{|y|\leq x}\,dx\,dy = c\int_{\mathbf{R}} ye^{-|y|}\,dy = 0$$

puisque la fonction est intégrable et impaire.

Lois marginales. Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire de densité p. On veut déterminer les lois marginales de Z, $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$. On va montrer pour cela que X (respectivement Y) possède une densité p_X (respectivement p_Y) que l'on va calculer en fonction de p. Utilisons la méthode vue pour les variables aléatoires réelles. Soit donc $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux et bornée. Calculons $\mathbb{E}[f(X)]$. D'après le Théorème 5 et le théorème de Fubini, on a

$$\mathbb{E}[f(X)] = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x)\, p(x,y)\, dxdy = \int_{\mathbf{R}} f(x) \left(\int_{\mathbf{R}} p(x,y)\, dy \right) dx.$$

Mais si X a pour densité p_X,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbf{R}} f(x)\, p_X(x) dx,$$

et par identification on obtient

$$p_X(x) = \int_{\mathbf{R}} p(x,y)\, dy, \qquad \text{respectivement,} \qquad p_Y(y) = \int_{\mathbf{R}} p(x,y)\, dx.$$

Notons que p_X et p_Y sont bien des densités puisqu'elles sont intégrables, positives et, par définition

$$\int_{\mathbf{R}} p_X(x) dx = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} p(x,y)\, dy \right) dx = \iint_{\mathbf{R}^2} p(x,y)\, dxdy = 1\ ;$$

idem pour p_Y.

Nous venons de montrer le résultat suivant :

Proposition 6. *Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire de densité p. Alors les lois marginales $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ admettent pour densités respectives*

$$p_X(x) = \int_{\mathbf{R}} p(x,y)\, dy, \qquad \textit{et,} \qquad p_Y(y) = \int_{\mathbf{R}} p(x,y)\, dx.$$

Exemple. Calculons les lois marginales de l'exemple $(*)$. Il vient immédiatement, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$p_X(x) = ce^{-x} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{|y| \le x}\, dy = ce^{-x} \mathbf{1}_{x \ge 0} \int_{-x}^{x} dy = 2cxe^{-x} \mathbf{1}_{x \ge 0} = xe^{-x} \mathbf{1}_{x \ge 0}.$$

Le calcul de p_Y est plus simple. On a directement

$$p_Y(y) = c \int_{\mathbf{R}} e^{-x} \mathbf{1}_{|y| \le x}\, dx = c \int_{|y|}^{+\infty} e^{-x}\, dx = ce^{-|y|} = \frac{1}{2} e^{-|y|}.$$

Indépendance. Soit $Z = (X, Y)$ de densité p. À quelle condition sur p X et Y sont-elles indépendantes ? Peut-on trouver un critère simple ?

Théorème 7. *Soient $Z = (X, Y)$ un couple aléatoire de densité p, p_X et p_Y les densités marginales. Alors X et Y sont indépendantes si et seulement si $p(x,y) = p_X(x) p_Y(y)$ pour tout (x,y) de $\mathbf{R}^2$ éventuellement privé d'une partie négligeable.*

Ce résultat n'est pas très difficile à montrer. Nous avons vu précédemment que X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout couple (g, h) de fonctions boréliennes bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on a $\mathbb{E}[g(X)\,h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)]\,\mathbb{E}[h(Y)]$. D'après le Théorème 5, on a prenant $f(x, y) = g(x)\,h(y)$,

$$\mathbb{E}[g(X)\,h(Y)] = \iint_{\mathbf{R}^2} g(x)\,h(y)\,p(x, y)\,dxdy.$$

D'un autre côté,

$$\mathbb{E}[g(X)]\,\mathbb{E}[h(Y)] = \int_{\mathbf{R}} g(x)\,p_X(x)\,dx \times \int_{\mathbf{R}} h(y)\,p_Y(y)\,dy = \iint_{\mathbf{R}^2} g(x)h(y)\,p_X(x)p_Y(y)\,dxdx.$$

Le résultat s'en suit immédiatement.

Remarque(s). Il faut savoir utiliser le théorème précédent dans les deux sens.

Exemple. Si on reprend l'exemple de la page 6, on voit que X et Y ne sont pas indépendantes puisque la densité du couple n'est pas égale au produit des densités marginales.

4. Calcul de loi image.

Au chapitre précédent, nous avons considéré le problème suivant : si X est une variable aléatoire de loi connue et u une fonction réelle disons continue par morceaux quelle est la loi de la variable $u(X)$?

Dans bien des cas, on part d'un couple aléatoire (X, Y) et on s'intéresse à une variable aléatoire réelle définie à partir de ce couple : par exemple la somme $X + Y$, le produit XY ou encore le quotient X/Y.

Lorsque le couple possède une densité, on peut espérer que la variable construite à l'aide de celui-ci va également en posséder une. On peut alors essayer de la déterminer en utilisant la démarche du chapitre précédent qui consiste à calculer, si ξ désigne cette variable réelle, $\mathbb{E}[f(\xi)]$ pour toute fonction f continue par morceaux et bornéee et d'identifier la densité p_ξ.

Exemple. Donnons quelques exemples illustrant cette technique.

1° Considérons deux variables aléatoires X et Y indépendantes, de loi exponentielle de paramètre λ pour X et μ pour Y. Cherchons la loi de $\xi = X/Y$ en déterminant sa densité. Soit f une fonction continue par morceaux et bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, calculons $\mathbb{E}[f(\xi)]$. On a :

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = \iint_{]0,+\infty[^2} f(x/y)\,\lambda e^{-\lambda x}\,\mu e^{-\mu y}\,dxdy = \lambda\mu \int_0^{+\infty} e^{-\mu y} \left(\int_0^{+\infty} f(x/y)\,e^{-\lambda x}\,dx \right) dy.$$

Mais, posant $z = x/y$, on obtient, pour tout $y > 0$,

$$\int_0^{+\infty} f(x/y)\,e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^{+\infty} f(z)\,ye^{-\lambda zy}\,dz,$$

ce qui conduit à, via le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = \lambda\mu \int_0^{+\infty} e^{-\mu y} \left(\int_0^{+\infty} f(z)\,ye^{-\lambda zy}\,dz \right) dy = \lambda\mu \int_0^{+\infty} f(z) \left(\int_0^{+\infty} ye^{-(\lambda z+\mu)y}\,dy \right) dz.$$

Une intégration par parties donne, pour $z > 0$ fixé,

$$\int_0^{+\infty} y e^{-(\lambda z+\mu)y}\, dy = \frac{1}{(\lambda z+\mu)^2} \ ;$$

il s'en suit que

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = \int_0^{+\infty} f(z)\, \frac{\lambda\mu}{(\lambda z+\mu)^2}\, dz = \int_{\mathbf{R}} f(z)\, \frac{\lambda\mu}{(\lambda z+\mu)^2} \mathbf{1}_{z>0}\, dz.$$

ξ a donc pour densité la fonction $z \longmapsto \lambda\mu(\lambda z+\mu)^{-2}\mathbf{1}_{z>0}$.

2º Soient X et Y deux v.a. indépendantes ; X de densité $3x^2\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, Y de loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminons la loi du produit $\xi = XY$.

Si f est une fonction continue par morceaux et bornée sur $\mathbf{R}$, on a :

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = \iint_{[0,1]^2} f(xy)\, 3x^2\, dxdy = 3 \int_0^1 x^2 \left(\int_0^1 f(xy)\, dy \right) dx.$$

Pour $x \in]0,1[$ fixé, le changement de variables $z = xy$ donne

$$\int_0^1 f(xy)\, dy = \frac{1}{x} \int_0^x f(z)\, dz = \frac{1}{x} \int_0^1 f(z) \mathbf{1}_{z<x}\, dz.$$

Par suite, il vient, d'après le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = 3 \int_0^1 x \left(\int_0^1 f(z)\mathbf{1}_{z<x}\, dz \right) dx = 3 \int_0^1 f(z) \left(\int_0^1 x\mathbf{1}_{z<x}\, dx \right) dz,$$

et on obtient finalement,

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = \frac{3}{2} \int_0^1 f(z) \left(1 - z^2\right) dz = \int_{\mathbf{R}} f(z)\, \frac{3}{2} \left(1 - z^2\right) \mathbf{1}_{[0,1]}(z)\, dz.$$

ξ a pour densité la fonction $z \longmapsto \frac{3}{2}\left(1 - z^2\right) \mathbf{1}_{[0,1]}(z)$.

3º Pour finir considérons deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Laplace i.e. de densité $e^{-|x|}/2$ et déterminons la loi de $\xi = 2X + Y$. Si f est continue par morceaux et bornée, on a, via le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = \frac{1}{4} \iint_{\mathbf{R}^2} f(2x+y) e^{-|x|} e^{-|y|}\, dxdy = \frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}} e^{-|x|} \left(\int_{\mathbf{R}} f(2x+y) e^{-|y|}\, dy \right) dx;$$

le changement de variables $z = y + 2x$ donne, pour tout x,

$$\int_{\mathbf{R}} f(2x+y) e^{-|y|}\, dy = \int_{\mathbf{R}} f(z) e^{-|z-2x|}\, dz.$$

Par conséquent, appliquant encore le théorème de Fubini, on obtient

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = \frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}} e^{-|x|} \left(\int_{\mathbf{R}} f(z) e^{-|z-2x|}\, dz \right) dx = \frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}} f(z) \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-|x|} e^{-|z-2x|}\, dx \right) dz.$$

Pour $z > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} e^{-|x|}e^{-|z-2x|}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-(z-2x)}\,dx + \int_{0}^{z/2} e^{-x}e^{-(z-2x)}\,dx + \int_{z/2}^{+\infty} e^{-x}e^{z-2x}\,dx, \\
&= e^{-z}\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx + e^{-z}\int_{0}^{z/2} e^{x}\,dx + e^{z}\int_{z/2}^{+\infty} e^{-3x}\,dx \\
&= \frac{1}{3}e^{-z} + e^{-z}\left(e^{z/2}-1\right) + \frac{1}{3}e^{z}e^{-3z/2} \\
&= \frac{4}{3}e^{-z/2} - \frac{2}{3}e^{-z}.
\end{aligned}$$

De manière analogue, on a pour $z < 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} e^{-|x|}e^{-|z-2x|}\,dx &= \int_{-\infty}^{z/2} e^{x}e^{-(z-2x)}\,dx + \int_{z/2}^{0} e^{x}e^{z-2x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{z-2x}\,dx, \\
&= e^{-z}\int_{-\infty}^{z/2} e^{3x}\,dx + e^{z}\int_{z/2}^{0} e^{-x}\,dx + e^{z}\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}\,dx \\
&= \frac{1}{3}e^{-z}e^{3z/2} + e^{z}\left(e^{-z/2}-1\right) + \frac{1}{3}e^{z} \\
&= \frac{4}{3}e^{z/2} - \frac{2}{3}e^{z}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\forall z \in \mathbf{R}, \qquad \int_{\mathbf{R}} e^{-|x|}e^{-|z-2x|}\,dx = \frac{4}{3}e^{-|z|/2} - \frac{2}{3}e^{-|z|}.$$

Il vient alors

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = \frac{1}{6}\int_{\mathbf{R}} f(z)\left(2e^{-|z|/2} - e^{-|z|}\right)dz\ ;$$

ξ a pour densité $z \longmapsto \frac{1}{6}\left(2e^{-|z|/2} - e^{-|z|}\right)$.