Loi d'une variable aléatoire réelle

Exercice 1. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application où X et Y sont deux ensembles non vides.

1. (a) Soient $A \subset X$ et $B \subset Y$; rappeler la définition de $f(A)$ et de $f^{-1}(B)$.

   (b) Pour $X = Y = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^2$, préciser $f(]0,2[)$, $f^{-1}(]-4,3])$.

2. (a) Montrer que pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de Y,

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

   (b) Établir que pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X,

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

   Montrer par un exemple simple que $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$ n'est pas nécessairement inclus dans $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)$.

Exercice 2. On lance deux fois un dé équilibre et on désigne par P le produit des résultats obtenus. Pour modéliser cette expérience, on considère $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$ muni de la probabilité uniforme et l'application P définie sur Ω par $P((i, j)) = ij$.

Pour chacune des valeurs possibles k de P, déterminer $\{\omega \in \Omega : P(\omega) = k\}$ puis $\mathbb{P}(P = k)$.

Exercice 3. Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F avec $F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = x/4$ si $0 \le x < 1$, $F(x) = x/2$ si $1 \le x < 2$ et $F(x) = 1$ si $x \ge 2$.

Tracez le graphe de F puis calculer $\mathbb{P}(X = 1/2)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X \in]1/2, 3/2])$.

Exercice 4. À quelle condition sur les réels a et b la fonction F définie par $F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = 1$ si $x \ge 1$ et $F(x) = ax^2 + b$ pour $0 \le x < 1$ est-elle une fonction de répartition ?

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F donnée par

$$F(x) = 0, \quad \text{si } x < 0, \qquad F(x) = \frac{[x]}{1 + [x]}, \quad \text{si } x \ge 0,$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X \in]1, 2])$, $\mathbb{P}(X \in [1, 4])$.

Calculer, pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n)$?

Exercice 6. Une urne contient cinq boules rouges et une noire. On tire les boules successivement et sans remise jusqu'à ce que l'urne soit vide. Quelle est la loi de la variable aléatoire « rang d'apparition de la boule noire » ?

Exercice 7. Un sac contient n boules dont m sont blanches et $n - m$ noires. On tire les boules successivement et sans remise jusqu'à ce que l'urne soit vide. Quelle est la loi de la variable aléatoire « rang de la première boule blanche tirée » ?

Exercice 8. À quelle condition sur le réel λ, la fonction $p(x) = \lambda|x| \exp(-|x|)$ est-elle une densité de probabilité ? Dans ce cas, déterminer la fonction de répartition associée ?

Exercice 9. 1. Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer les fonctions de répartition de $Y = u(X)$ et $Z = v(X)$ où $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = \min(x, 1-x)$.

2. Déterminer la fonction de répartition de $T = \max(S, 0)$ où S suit la loi de Cauchy. La v.a. T possède-t-elle une densité ?

Exercice 10. Soit X une v.a. uniforme sur $[0,1]$ et $p \in]0,1[$. Quelle est la loi de $Y = \mathbf{1}_{X \leq p}$? Construire à l'aide de X une variable aléatoire Z prenant les valeurs a, b et c avec probabilité p, q et r si p, q, r sont trois réels de $[0,1]$ tels que $p + q + r = 1$.

Exercice 11. Soit X une v.a. suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la loi de la v.a. $Y = 1 + [X]$? ($[x]$ désigne la partie entière de x).

Exercice 12. Quelle est la loi de la v.a. $Y = 2 + [X]$ si X a pour fonction de répartition F définie par $F(x) = q^x(x(q-1) - 1) + 1$ si $x > 0$, $F(x) = 0$ sinon, $0 < q < 1$.

Exercice 13. Soit X une v.a. suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ i.e. pour $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. On définit une v.a. Y en posant $Y = X/2$ si X est pair et $Y = (X+1)/2$ si X est impair. Déterminer la loi de Y.

Exercice 14. Soit X une v.a. uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la loi de la v.a. $Y = \exp(\lambda X)$ si $\lambda > 0$? Y possède-t-elle une densité ?

Exercice 15. À quelle condition sur α, la fonction p définie par $p(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$ si $0 < x < 1$, $p(x) = 0$ sinon est-elle une densité de probabilité ? Montrer que la loi de $Y = -\alpha \ln(X)$ ne dépend pas de α.

Exercice 16. Soient X une v.a. uniforme sur $[0,1]$ et $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la v.a. $Y = -\ln(X)/\lambda$ en calculant sa fonction de répartition puis en donnant une densité ?

Exercice 17. Déterminer λ tel que la fonction p définie par $p(x) = \lambda/(1-x)^2$ pour $x \in [2,4[$ et $p(x) = 0$ sinon soit une densité de probabilité. Si X est une v.a. de densité p, déterminer sa fonction de répartition.

Exercice 18. Soient α un réel et p la fonction réelle définie par

$$p(x) = \frac{\alpha}{(x-1)^2}, \quad \text{si } x < 0, \qquad p(x) = \alpha e^{-2x}, \quad \text{si } x \geq 0.$$

1. Calculer α pour que p soit une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition F associée à p.

3. Soit X une v.a.r. de densité p. Déterminer la loi de la v.a. $Y = \operatorname{sgn}(X)$ avec $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$, $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ et $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

Exercice 19. On suppose que les familles d'un pays imaginaire ne peuvent avoir de jumeaux, que la naissance d'un garçon est aussi probable que celle d'une fille et que le sexe d'un enfant est indépendant de celui des enfants de sa famille nés avant lui. On suppose également que la variable aléatoire X qui à chaque famille associe son nombre d'enfants vérifie $\mathbb{P}(\{X = n\}) = \alpha p^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

1. Calculer $\mathbb{P}(\{X = 0\})$ en donnant les conditions que α et p doivent satisfaire.

2. Soit Y la variable aléatoire qui à chaque famille associe son nombre de garçons. Déterminer la probabilité pour qu'une famille de n enfants ait k garçons.

3. Calculer $\mathbb{P}(\{Y = 0\})$. Calculer, pour $k \in \mathbf{N}^*$, la probabilité $\mathbb{P}(\{Y = k\})$ qu'une famille ait k garçons. On rappelle que, pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $|t| < 1$, $(1-t)^{-(k+1)} = \sum_{j \geq 0} (j+1)(j+2)\ldots(j+k) t^j / j!$.

4. Soit $k > 0$. Quelle est la probabilité qu'une famille comportant k garçons ait n enfants ?

5. Étant donné une famille ayant au moins un garçon, déterminer la probabilité qu'elle en ait au moins deux.