Espérance d'une variable aléatoire réelle

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. Calculer $\mathbb{E}[X]$ puis, pour tout z, $\mathbb{E}[z^X]$.

Même questions lorsque X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}$ et $p \in [0,1]$.

Exercice 2. Calculer la moyenne et la variance des lois usuelles vues en cours.

Exercice 3. Soient $a > 0$ et b un réel. Déterminer la loi de la v.a. $Y = aX + b$ quand X suit la loi uniforme sur $[0,1]$ puis quand X est gaussienne centrée réduite.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer, pour tout réel s, $\mathbb{E}[e^{sX}]$.

Exercice 5. Soit X une v.a. de densité $p(x) = x \exp(-x^2/2)\mathbf{1}_{x\geq 0}$. Vérifier que p est une densité de probabilité puis calculer la moyenne de X.

Exercice 6. À quelle condition sur α, la fonction p définie par $p(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ si $0 < x < 1$, $p(x) = 0$ sinon est-elle une densité de probabilité ? Montrer que la loi de $Y = -\alpha \ln(X)$ ne dépend pas de α. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire de densité $\exp(-|x|)/2$.

1. Pour $|s| < 1$, calculer $\Lambda(s) = \mathbb{E}[\exp(sX)]$. Comparer $\Lambda''(0)$ et $\mathbb{E}[X^2]$.
2. Déterminer la loi des variables aléatoires $U = \exp(-|X|)$ et $Y = \dfrac{1-U}{U}$.

Exercice 8. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit $Y = \exp(X)$. Déterminer la densité de Y, $\mathbb{E}[Y]$ ainsi que $\mathbb{V}[Y]$.

Exercice 9. Soient X et ε deux v.a. indépendantes ; X de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ et ε de loi donnée par $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. On pose $Y = \varepsilon X$. Quelle est la loi de Y ? Calculer $\mathbb{E}[XY]$. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 10. Soit X une v.a. de densité $p(x) = \lambda \exp(-|x|)$.

1. (a) Calculer λ ; déterminer la fonction de répartition de X et la loi de $|X|$.

   (b) Montrer que X possède des moments de tous les ordres et calculer $\mathbb{E}[X^n]$ pour tout entier n. En déduire la moyenne et la variance de X.

2. Soit Y une v.a. indépendante de X et de même loi. Calculer la moyenne et la variance des v.a. $S = 2X - Y$, $T = X^2$.

Exercice 11. Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ n v.a. indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$. Quelle est la loi de $S = X_1 + \ldots + X_n$? En déduire la moyenne et la variance de S.

Exercice 12. Soient X et Y deux v.a. indépendantes. Calculer la loi de la v.a. $X + Y$ dans les cas suivants :

1. X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, Y de loi $\mathcal{P}(\mu)$;
2. X de loi $\mathcal{B}(n,p)$, Y de loi $\mathcal{B}(m,p)$;
3. X de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, Y de loi $\mathcal{N}(\mu',\sigma'^2)$.

Exercice 13. Une puce se déplace dans le plan par saut de longueur $\delta > 0$. La puce part du point O, origine des coordonnées du plan, et saute n fois dans une direction qui, pour chaque saut, est aléatoire. L'abscisse et l'ordonnée de la puce, après n sauts, sont

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \delta \cos(\theta_i), \qquad Y_n = \sum_{i=1}^{n} \delta \sin(\theta_i);$$

et on suppose les v.a. $(\theta_i)_{1 \geq i \geq n}$ indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.

Calculer l'espérance et la variance de de X_n et Y_n, puis $\mathbb{E}[X_n^2 + Y_n^2]$. Calculer $\mathbb{E}[X_n Y_n]$; les v.a. X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

Exercice 14. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ où $0 < p < 1$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$S(\omega) = \inf\{i \geq 1,\ X_i(\omega) = 1\}, \qquad T(\omega) = \inf\{i \geq 1,\ X_i(\omega) = 0\},$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(T = \infty) = \mathbb{P}(S = \infty) = 0$ et déterminer la loi de S et T.
2. On définit, pour $\omega \in \Omega$, $\tau(\omega) = \inf\{i \geq 2,\ X_{i-1}(\omega) = 0,\ X_i(\omega) = 1\}$ avec la même convention.
   (a) Montrer que $\tau \geq T + 1$;
   (b) Établir que $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0$;
   (c) Montrer que $\tau(\omega) = \inf\{i > T(\omega),\ X_i(\omega) = 1\}$.
3. (a) Montrer que, si $k \geq 2$, $\{\tau = k\} = \bigcup_{i=1}^{k-1} \{\tau = k\} \cap \{T = i\}$.
   (b) Montrer que si $m \geq 1$, $l \geq 1$, $\mathbb{P}(\tau = m + l / T = l) = \mathbb{P}(S = m)$.
   (c) En déduire que, pour $k \geq 2$, notant $q = 1 - p$,

$$\mathbb{P}(\tau = k) = \frac{pq}{q - p}\left(q^{k-1} - p^{k-1}\right).$$

Déterminer la fonction caractéristique de τ, sa moyenne, sa variance.