Couples aléatoires

Exercice 1. Soient X et Y deux v.a. finies. La loi du couple $Z = (X, Y)$ est donnée par le tableau suivant :

X/Y	0	1	2	6
1	0	2/9	1/9	1/9
2	1/27	1/9	1/27	1/9
3	0	0	1/9	4/27

Trouver les lois marginales ; X et Y sont-elles indépendantes ? Pouvait-on le deviner en regardant le tableau ? Quelle est la probabilité pour que XY soit impair ?

Exercice 2. 1. Soient X et Y deux v.a. discrètes à valeurs dans $\{x_i,\ i \in \mathbf{N}\}$ et $\{y_j,\ j \in \mathbf{N}\}$. On suppose que $\mathbb{P}(X = x_i,\ Y = y_j) = u_i v_j$ pour tout (i, j). Trouver les lois marginales et montrer que X et Y sont indépendantes.

2. Soient X et Y deux v.a. indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $Z = Y - X$ et $M = \min(X, Y)$.

(a) Montrer que si $m \in \mathbf{N}^*$ et $z \in \mathbf{Z}$,

$$\mathbb{P}(M = m,\, Z = z) = \mathbb{P}(X = m - z)\,\mathbb{P}(Y = m), \quad \text{si } z < 0,$$

$$\mathbb{P}(M = m,\, Z = z) = \mathbb{P}(X = m)\,\mathbb{P}(Y = m + z), \quad \text{si } z \geq 0.$$

(b) En déduire que , pour tout $(m, z) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{Z}$, $\mathbb{P}(M = m,\, Z = z) = p^2(1 - p)^{2m-2}(1 - p)^{|z|}$. Montrer que M et Z sont indépendantes.

Exercice 3 (2003, ex)**.** Soit (X, Y) un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ tel que

$$\forall (k, n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k, Y = n) = (1 - q^n)\, q^{n(k-1)} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!},$$

avec $q \in]0, 1[$, $\lambda > 0$.

Déterminer les lois de X et de Y. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 4. Une étudiante donne rendez-vous à son ami entre 20 h. et 21 h. Les deux amis – à l'initiative du jeune homme qui est habitué à la ponctualité douteuse de sa copine mais redoute sa susceptibilité – conviennent de n'attendre pas plus de 15 minutes.

1. On suppose qu'ils arrivent indépendamment et à des instants uniformément distribués dans l'heure convenue.

(a) Représenter graphiquement le domaine du plan où $|x - y| \leq 1/4$.

(b) Quelle est la probabilité pour que les deux amis se rencontrent ?

2. Le jeune homme fixe son arrivée à l'heure t. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?

Exercice 5. Soit $Z = (X, Y)$ un couple de densité $p(x, y) = c\,(x + y)\mathbf{1}_{0<y-x<2}\mathbf{1}_{0<x<2}$. Calculer la constante c puis déterminer les densités marginales. A-t-on indépendance ?

Exercice 6. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de densités respectives p et q. Trouver la densité de $S = X + Y$. Qu'obtient-on si X et Y suivent respectivement les lois $\mathcal{E}xp(\lambda)$ et $\mathcal{E}xp(\mu)$ ($\lambda > 0$, $\mu > 0$) ?

Exercice 7. Soit $Z = (X, Y)$ un couple aléatoire de densité p donnée par $p(x, y) = ke^{-y}$ si $0 < x < y$ et $p(x, y) = 0$ sinon.

1. (a) Dessiner le domaine du plan sur lequel p n'est pas nulle. Calculer k.

   (b) Déterminer les densités marginales de Z. X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Déterminer la loi de $T = Y - X$ puis celle de $R = X/Y$.

Exercice 8 (2002, ex)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ c'est à dire de densité $x \longmapsto \lambda\, e^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{x \geq 0}$.

Déterminer la fonction de répartition de X puis la loi de la variable $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 9 (2002, ex)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale i.e. de densité $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $R = X/Y$.