Théorème de Convergence Dominée et Applications

- Ce chapitre est dédié à des théorèmes limite, très utilisés en pratique
- Dans toute la suite, $(E, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

1. Rappels.

Théorème (Convergence monotone). *Soient $f \in \mathscr{M}_+$ et $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{M}_+$ une suite croissante telles que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$. Alors,*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,\mu(dx) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_E f_n(x)\,\mu(dx) = \int_E f(x)\,\mu(dx).$$

- $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{M}_+$ suite croissante signifie que

$$\forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad f_n(x) \leq f_{n+1}(x).$$

- Le résultat se réécrit

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,\mu(dx) = \int_E \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)(x)\,\mu(dx).$$

Exemple(s). Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{nx+1}\,dx$$

Corollaire. *Soit $(u_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{M}_+$. Alors,*

$$\int_E \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)(x)\,\mu(dx) = \sum_{n\geq 0} \int_E u_n(x)\,\mu(dx).$$

Corollaire (Lemme de Fatou). *Soit $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{M}_+$. Alors*

$$\int_E \left(\liminf f_n\right)(x)\,\mu(dx) \leq \liminf \int_E f_n(x)\,\mu(dx).$$

2. Théorème de convergence dominée.

Théorème. *Soit* $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions mesurables de* E *dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *ou* $\mathbf{C}$*. On suppose que*

1. *la suite* $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge* μ*-presque ; on note* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$
2. *il existe une fonction* g*,* μ*-intégrable, telle que :*

$$\forall n \geq 0, \qquad |f_n| \leq g, \quad \mu - p.p.$$

Alors, les fonctions f_n *et* f *sont* μ*-intégrables et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|(x)\,\mu(dx) = 0.$$

- En particulier,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mu(dx) = \int_E f(x)\,\mu(dx) = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mu(dx).$$

- La première hypothèse signifie qu'il existe $N_1 \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(N_1) = 0$ et $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge pour tout $x \in N_1^c$.
  - On pose $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ si $x \in N_1^c$, $f(x) = 0$ sinon. La fonction f est mesurable et

$$\forall x \in N_1^c, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

- La majoration de la deuxième hypothèse signifie que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $N_n \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(N_n) = 0$ et

$$\forall x \in N_n^c, \qquad |f_n(x)| \leq g(x).$$

- Comme $N = \cup_{\mathbf{N}} N_n$ est négligeable, la majoration est équivalente,

$$\forall x \in N^c, \qquad \sup_{n\geq 0} |f_n(x)| \leq g(x),$$

  c'est à dire $\sup_{n\geq 0} |f_n| \leq g$ μ-p.p.

- Finalement, la deuxième hypothèse signifie que $\sup_{n\geq 0} |f_n|$ est μ-intégrable.

`2017/2018 : fin du cours 10`

Exemple(s). • Soit f une fonction μ-intégrable. Alors

$$\lim_{n\to\infty} n\mu\big(\{x \in E : |f(x| \geq n\}\big) = 0.$$

- Puisque f est μ-intégrable, f est finie μ-p.p. Donc $|f|\mathbf{1}_{|f|\geq n} \longrightarrow 0$ μ-p.p.
- Pour tout n et tout x, $|f(x)|\mathbf{1}_{|f|\geq n}(x) \leq |f(x)| \in \mathrm{L}^1$.

- Par CVD,

$$0 \leq n\mu\big(\{x \in E : |f(x)| \geq n\}\big) \leq \int_E |f| \mathbf{1}_{|f|\geq n}\, d\mu \longrightarrow 0.$$

- Déterminons $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}_+^*} \frac{(\sin x)^n}{x(1+x)}\, \lambda(dx)$.

  1. Pour tout $x > 0 \neq \pi/2 \mod \pi$, $\displaystyle\frac{(\sin x)^n}{x(1+x)} \longrightarrow 0$;
  2. Pour tout $n \geq 1$,

$$\left|\frac{(\sin x)^n}{x(1+x)}\right| = \frac{|\sin x|}{x} \frac{|\sin x|^n}{1+x} \leq \frac{1}{1+x} \mathbf{1}_{]0,1[}(x) + \frac{1}{x^2} \mathbf{1}_{x\geq 0} \in \mathrm{L}^1$$

  3. Par CVD,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}_+^*} \frac{(\sin x)^n}{x(1+x)}\, \lambda(dx) = 0.$$

Démonstration. Montrons d'abord le résultat lorsque la convergence et la majoration ont lieu pour tout x. On applique le lemme de Fatou à la fonction $2g - |f - f_n|$; il vient

$$2\int_E g\, d\mu = \int_E \liminf (2g - |f - f_n|)\, d\mu$$
$$\leq \liminf \int_E (2g - |f - f_n|)\, d\mu = 2\int_E g\, d\mu - \limsup \int_E |f - f_n|\, d\mu.$$

Par conséquent,

$$0 \leq \limsup \int_E |f - f_n|\, d\mu \leq 0.$$

Pour le cas général, avec les notations suivants l'énoncé, on considère les fonctions $f_n \mathbf{1}_M$, $f\mathbf{1}_M$ où $M = N_1 \cup N$. La convergence et la domination ont alors lieu pour tout x. On applique le cas précédent en remarquant que, M étant négligeable, on ne change pas la valeur des intégrales. □

Corollaire. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$. On suppose que*

$$\sum_{n\geq 0} \int_E |u_n|(x)\, \mu(dx) = \int_E \sum_{n\geq 0} |u_n|(x)\, \mu(dx) < +\infty.$$

Alors, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente μ-presque partout, μ-intégrable et

$$\sum_{n\geq 0} \int_E u_n(x)\, \mu(dx) = \int_E \sum_{n\geq 0} u_n(x)\, \mu(dx) < +\infty.$$

- La fonction $\sum_{n\geq 0} |u_n|(x)$ étant μ-intégrable, elle est finie μ-p.p.
  - Par conséquent, $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge absolument μ-p.p.
  - On pose $S(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$ lorsque la série est absolument convergente, $S(x) = 0$ sinon.
- Il suffit d'appliquer le théorème de CVD aux sommes partielles.

Exemple(s). Montrons que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \qquad F(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{zx} e^{-x^2/2} dx = e^{z^2/2} := G(z).$$

On admet pour l'instant que $F(0) = 1$ (cf. cours sur les mesures produit). On montre facilement que, pour tout réel s, $F(s) = G(s)$. En effet, la mesure de Lebesgue étant invariante par translation, notant $\tau_s(x) = x - s$,

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{sx - x^2/2} dx = \frac{e^{s^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{(x-s)^2/2} \lambda(dx) \\ &= \frac{e^{s^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{\tau_s(x)^2/2} \lambda(dx) = \frac{e^{s^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{y^2/2} (\tau_s)_*(\lambda)(dy) = \frac{e^{s^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{y^2/2} \lambda(dy) = e^{s^2/2} = G(s). \end{aligned}$$

La fonction G est entière :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \qquad e^{z^2/2} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n\, n!} z^{2n}.$$

Montrons que F est aussi une fonction entière. Pour tout $z \in \mathbf{C}$ et $x \in \mathbf{R}$,

$$e^{zx} e^{-x^2/2} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n x^n}{n!} e^{-x^2/2}.$$

Donc, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$\sum_{n\geq 0} \int_{\mathbf{R}} \frac{|z^n x^n|}{n!} e^{-x^2/2} \lambda(dx) = \int_{\mathbf{R}} \sum_{n\geq 0} \frac{|zx|^n}{n!} e^{-x^2/2} \lambda(dx) = \int_{\mathbf{R}} e^{|z||x|} e^{-x^2/2} \lambda(dx) < +\infty.$$

D'après le corollaire pour les séries du théorème de CVD,

$$\forall z \in \mathbf{C}, \qquad F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\geq 0} \int_{\mathbf{R}} \frac{z^n x^n}{n!} e^{-x^2/2} \lambda(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbf{R}} x^n e^{-x^2/2} \lambda(dx).$$

Par conséquent, $(F-G)(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, le rayon de convergence étant infini et $(F-G)(s) = 0$ pour tout réel s. Donc $a_n = 0$ pour tout n. Sinon, notant $p = \min(n \in \mathbf{N} : a_n \neq 0) \geq 1$, on a $(F-G)(z) = z^p \sum_{n\geq 0} a_{p+n} z^n = z^p u(z)$ avec $u(0) = a_p \neq 0$. La fonction u étant continue, elle ne s'annule pas au voisinage de 0, $F-G$ non plus. C'est impossible puisque $F-G$ est nulle sur $\mathbf{R}$. On a donc, pour tout $z \in \mathbf{C}$, $F(z) = G(z)$.

3. Intégrales à paramètre.

- L'objectif du paragraphe est l'étude des fonctions du types

$$F(t) = \int_E f(t,x)\, \mu(dx).$$

  - Par exemple,

$$\Gamma(t) = \int_{]0,+\infty[} x^{t-1} e^{-x} \lambda(dx) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \qquad t > 0.$$

- Fixons le cadre de l'étude :
  - Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré
  - Soit (M, d) un espace métrique et $T \subset M$ (le plus souvent T est un intervalle de $\mathbf{R}$)
  - Soit $f : T \times E \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$ une fonction
  - On considère la fonction
$$F(t) = \int_E f(t,x)\,\mu(dx), \quad t \in T$$

Théorème. *Soit a un point adhérent à T. On suppose que*

1. *Pour tout $t \in T$, $x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable ;*
2. *Pour μ-presque tout x, $t \longmapsto f(t,x)$ possède une limite quand $t \to a$; soit $l(x) = \lim_{t\to a} f(t,x)$;*
3. *Il existe une fonction g, positive et μ-intégrable, telle que :*
$$\sup_{t\in T} |f(t,x)| \leq g(x), \quad \mu - p.p.$$

Alors, pour tout $t \in T$, l et $x \longmapsto f(t,x)$ sont μ-intégrables et
$$\lim_{t\to a} \int_E |f(t,x) - l(x)|\,\mu(dx) = 0.$$

- En particulier, la fonction F est définie sur T et
$$\lim_{t\to a} F(t) = \lim_{t\to a} \int_E f(t,x)\,\mu(dx) = \int_E \lim_{t\to a} f(t,x)\,\mu(dx) = \int_E l(x)\,\mu(dx).$$

Corollaire (Continuité des intégrales à paramètre)**.** *On suppose que*

1. *Pour tout $t \in T$, $x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable ;*
2. *Pour μ-presque tout x, $t \longmapsto f(t,x)$ est continue sur T ;*
3. *Il existe une fonction g, positive et μ-intégrable, telle que :*
$$\sup_{t\in T} |f(t,x)| \leq g(x), \quad \mu - p.p.$$

Alors F est définie et continue sur T.

Démonstration. Il suffit de montrer que si $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de points de T convergeant vers a alors
$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f(t_n,x) - l(x)|\,\mu(dx) = 0.$$
Cela résulte du théorème de convergence dominée appliqué à $f_n(x) = f(t_n,x)$. □

`2017/2018 : fin du cours 11`

Exemple(s). Montrons que la fonction définie par

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

est continue sur $]0,+\infty[$.

1. Pour tout $t > 0$, $x \longmapsto e^{-tx}\dfrac{\sin x}{x}$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ donc borélienne ;
2. Pour tout $x > 0$, $t \longmapsto e^{-tx}\dfrac{\sin x}{x}$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$;
3. Domination. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x > 0$,

$$\sup_{t\geq\varepsilon} \left| e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right| = e^{-\varepsilon x}\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq e^{-\varepsilon x}$$

Comme $x \longmapsto e^{-\varepsilon x}$ est Lebesgue-intégrable sur $]0,+\infty[$, la fonction F est définie et continue sur $]\varepsilon,+\infty[$. Le résultat étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, F est continue sur $]0,+\infty[$.
Puisque, pour tout $x > 0$, $\lim_{t\to\infty} e^{-tx}\sin(x)/x = 0$, la domination précédente montre que $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$.

Corollaire (Dérivabilité des intégrales à paramètre)**.** *Soient $T = I$ un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et t_0 un point de I. On suppose que*

1. *Pour tout $t \in T$, $x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable ;*
2. *$x \longmapsto f(t_0,x)$ est μ-intégrable ;*
3. *Pour μ-presque tout x, $t \longmapsto f(t,x)$ est dérivable (resp. $\mathscr{C}^1$) sur I ;*
4. *Il existe une fonction g, positive et μ-intégrable, telle que :*

$$\sup_{t\in I}\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\right| \leq g(x), \quad \mu - p.p.$$

Alors F est dérivable (resp. $\mathscr{C}^1$) sur I et

$$\forall t \in I, \qquad F'(t) = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\,\mu(dx).$$

Démonstration. F est définie sur I, puisque d'après l'inégalité des AF, pour tout $t \in I$,

$$|f(t,x)| \leq |f(t_0,x)| + \sup_{\alpha\in[0,1]}\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t_0+\alpha(t-t_0)+,x)\right| |t-t_0| \leq |f(t_0,x)| + g(x)|t-t_0| \in \mathrm{L}^1$$

Pour établir la dérivabilité de F et la formule donnant F', il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite

$$g_n(x) = \frac{f(t+h_n,x)-f(t,x)}{h_n}$$

où t est fixé dans I et $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$.

□

Exemple(s). Reprenons l'étude de la fonction

$$F(t)=\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

continue sur $]0,+\infty[$. Montrons qu'elle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ (en fait $\mathscr{C}^\infty$).

1. Déjà vu dans l'étude de la continuité ;
2. Pour tout $t>0$, $x\longmapsto e^{-tx}\dfrac{\sin x}{x}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ (cf. continuité) ;
3. Pour tout $x>0$, $t\longmapsto e^{-tx}\dfrac{\sin x}{x}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et
$$\forall t>0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}e^{-tx}\frac{\sin x}{x}=-e^{-tx}\sin(x).$$
4. Domination. Soit $\varepsilon>0$.
$$\forall x>0,\quad \sup_{t>\varepsilon}|-e^{-tx}\sin(x)|=e^{-\varepsilon x}|\sin x|\leq e^{-\varepsilon x}.$$

Comme $x\longmapsto e^{-\varepsilon x}$ est LI sur $\mathbf{R}_+^*$, F est $\mathscr{C}^1$ sur $]\varepsilon,+\infty[$ et

$$\forall t>\varepsilon,\qquad F'(t)=-\int_0^{\infty} e^{-tx}\sin x dx.$$

Comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et la formule ci-dessus est vraie pour tout $t>0$.
Remarquons que, pour tout $t>0$,

$$F'(t)=-\mathrm{Im}\left(\int_0^{\infty} e^{-tx}e^{ix}dx\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{i-t}\right)=-\frac{1}{1+t^2}.$$

Comme $\lim_{t\to\infty}F(t)=0$,

$$\forall t>0,\qquad F(t)=\frac{\pi}{2}-\arctan(t).$$

On a donc $\lim_{t\to 0^+}F(t)=\pi/2$. Montrons qu'on a également

$$\lim_{t\to 0^+}F(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

La fonction $x\longmapsto \sin x/x$ est (semi-)Riemann intégrable sur $]0,+\infty[$ (sans être LI). Elle est prolongeable par continuité en 0 et pour $z>y>0$, une intégration par parties,

$$\int_y^z\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\cos y}{y}-\frac{\cos z}{z}+\int_y^z\frac{\cos x}{x^2}\,dx,$$

montre qu'elle est RI sur $[y,+\infty[$.
Soit $y>0$. Pour tout $t>0$,

$$\left|F(t)-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|\leq\left|\int_0^y(e^{-tx}-1)\frac{\sin x}{x}\,dx\right|+\left|\int_y^{+\infty}e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|+\left|\int_y^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\pi}{2}-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| &= \lim_{t\to 0^+}\left|F(t)-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \limsup_{t\to 0^+}\left|F(t)-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \\
&\le \limsup_{t\to 0^+}\left|\int_0^{y}(e^{-tx}-1)\frac{\sin x}{x}\,dx\right| + \limsup_{t\to 0^+}\left|\int_y^{+\infty}e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| + \left|\int_y^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \\
&\le \limsup_{t\to 0^+}\left|\int_0^{y}(e^{-tx}-1)\frac{\sin x}{x}\,dx\right| + \sup_{t>0}\left|\int_y^{+\infty}e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| + \left|\int_y^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|.
\end{aligned}$$

Puisque $x\longmapsto \sin x/x$ est continue sur $[0,y]$ et donc bornée sur cet intervalle, par convergence dominée,

$$\limsup_{t\to 0^+}\left|\int_0^{y}(e^{-tx}-1)\frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \lim_{t\to 0^+}\left|\int_0^{y}(e^{-tx}-1)\frac{\sin x}{x}\,dx\right| = 0.$$

On a d'autre part, cf. intégration par parties,

$$\left|\int_y^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \lim_{z\to\infty}\left|\int_y^{z}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{2}{y}.$$

À nouveau par intégration par parties, une primitive de $x\longmapsto e^{-tx}\sin x=\mathrm{Im}(e^{-tx}e^{ix})$ est

$$\mathrm{Im}\left(\frac{e^{-tx}e^{ix}}{i-t}\right) = -e^{-tx}\frac{\cos x+t\sin x}{1+t^2}$$

qui est bornée par 2 pour tout $t>0$, on montre que, pour tout $t>0$,

$$\left|\int_y^{+\infty}e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \lim_{z\to\infty}\left|\int_y^{z}e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{4}{y}.$$

On a donc, pour tout $y>0$,

$$\left|\frac{\pi}{2}-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{6}{y}\ ;$$

il suffit d'envoyer y vers $+\infty$ pour conclure.

2017/2018 : fin du cours 12