Espaces Mesurés

1. Tribus.

- Dans toute la suite, E est un ensemble non vide.
- $\mathscr{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E
  - $A \subset E$ et $A \in \mathscr{P}(E)$
  - $x \in E$, $\{x\} \subset E$, $\{x\} \in \mathscr{P}(E)$
- $\mathscr{A}$ un ensemble de parties de E : $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(E)$

1.1. Définitions.

Définition (Tribu)**.** Soit $\mathscr{A}$ une classe de parties de E. On dit que $\mathscr{A}$ est une *tribu sur* E si

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$;
2. $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire : si $A \in \mathscr{A}$ alors $A^c = E \setminus A \in \mathscr{A}$;
3. $\mathscr{A}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{A}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur E, on dit que $(E,\mathscr{A})$ est un espace mesurable et les ensembles de $\mathscr{A}$ sont appelés ensembles mesurables.

- Une tribu est stable par union finie, par intersection finie, par différence, par différence symétrique, par intersection dénombrable, etc.

$$\bigcap_{n\geq 0} A_n = \left(\bigcup_{n\geq 0} A_n^c\right)^c.$$

- Si $\mathscr{A}$ est une tribu, alors $E \in \mathscr{A}$
- Attention, une tribu est stable par union **dénombrable** : c'est plus fort que la stabilité par union finie mais cela ne signifie pas que $\mathscr{A}$ est stable par union quelconque
  - L'ensemble

$$\mathscr{A} = \{A \subset E : A \text{ est au plus dénombrable ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$$

  est une tribu sur E mais n'est pas stable par union quelconque si E n'est pas dénombrable

- Attention,
$$\mathscr{A} = \{A \subset E : A \text{ est fini ou } A^c \text{ est fini}\}$$
est stable par union finie mais pas par union dénombrable. Ce n'est pas une tribu.

Définition (Tribu engendrée)**.** Soit $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(E)$ une classe de parties de E. On appelle *tribu engendrée par* $\mathscr{C}$, notée $\sigma(\mathscr{C})$, la plus petite tribu sur E (au sens de l'inclusion) contenant $\mathscr{C}$.

- La définition fait sens car une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.
  - $\sigma(\mathscr{C})$ est l'intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathscr{C}$, l'intersection étant non vide puisque $\mathscr{P}(E)$ est une tribu qui contient $\mathscr{C}$.
- Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur E qui contient $\mathscr{C}$ alors $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$.
- $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, E, A, A^c\}$
- Si $\mathscr{A}$ est une tribu, $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$.

Proposition (Image réciproque d'une tribu)**.** *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $\mathscr{B}$ une tribu sur F. Alors,*
$$f^{-1}(\mathscr{B}) = \left\{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}\right\}$$
est une tribu sur E.

- Rappelons que si $A \subset E$ et $B \subset F$,
$$f(A) = \{f(x) : x \in \mathscr{A}\}, \qquad f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\} \overset{not.}{=} \{f \in B\}$$
  - $x \in f^{-1}(B)$ est équivalent à $f(x) \in B$.
- Cette proposition résulte du fait que
$$f^{-1}\left(B^c\right) = \left(f^{-1}(B)\right)^c, \quad f^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-1}(B_n).$$

Exercice. Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $\mathscr{A}$ une tribu sur E. On note
$$f(\mathscr{A}) = \{f(A)\ ;\ A \in \mathscr{A}\}, \quad \text{et,} \quad f_*(\mathscr{A}) = \{B \subset F\ ;\ f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}.$$
Montrer que $f_*(\mathscr{A})$ est une tribu sur F mais qu'en général $f(\mathscr{A})$ n'est pas une tribu sur E

Proposition. *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $\mathscr{D}$ une classe de parties de F. Alors,*
$$f^{-1}(\sigma(\mathscr{D})) = \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right).$$

- L'image réciproque de la tribu engendrée par $\mathscr{D}$ est la tribu engendrée par l'image réciproque de $\mathscr{D}$.

Démonstration. • $f^{-1}(\sigma(\mathscr{D}))$ est une tribu qui contient $f^{-1}(\mathscr{D})$; par conséquent, elle contient $\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right) : \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{D}))$.

- On considère
$$f_*\left(\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right)\right)=\left\{B\subset F : f^{-1}(B)\in\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right)\right\}.$$
  - C'est une tribu qui contient $\mathscr{D}$: elle contient $\sigma(\mathscr{D})$ i.e.
$$\forall B\in\sigma(\mathscr{D}),\quad f^{-1}(B)\in\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right).$$
  - D'où $f^{-1}(\sigma(\mathscr{D}))\subset\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right)$.

□

2017/2018 : fin du cours 1

Définition (Tribu trace)**.** Soient $\mathscr{A}$ une tribu sur E et $B\subset E$. On appelle *tribu trace* (ou tribu induite) par $\mathscr{A}$ sur B la tribu sur B
$$\mathscr{A}_B=\{A\cap B : A\in\mathscr{A}\}.$$

- Attention, si $B\notin\mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}_B$ n'est pas incluse dans $\mathscr{A}$.

Définition (Tribu produit)**.** Soient $(E,\mathscr{A})$ et $(F,\mathscr{B})$ deux espaces mesurables. On appelle tribu produit la tribu sur $E\times F$ engendrée par les pavés mesurables, $\mathscr{R}$
$$\mathscr{R}=\{A\times B : A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}\}.$$

1.2. Tribu borélienne.

- Rappelons que pour la topologie usuelle de $\mathbf{R}$, un ensemble O de $\mathbf{R}$ est ouvert si
$$\forall x\in O,\ \exists a,b\in O,\ x\in]a,b[\subset O.$$
  - On note $\mathscr{O}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbf{R}$.
- Tout ouvert O de $\mathbf{R}$ est une union dénombrable d'ouvert :
$$O=\bigcup_{(\rho,r)\in I}]\rho-r,\rho+r[,\qquad I=\left\{(q,r)\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}_+^*,\ ]q-r,q+r[\subset O\right\}$$

Définition. La tribu $\sigma(\mathscr{O})$ engendrée par $\mathscr{O}$ est appelée la tribu borélienne de $\mathbf{R}$. On la note $\mathscr{B}(\mathbf{R})$. Ses éléments sont appelés les boréliens.

- On peut montrer qu'il existe des ensembles de $\mathbf{R}$ qui ne sont pas boréliens.

Proposition. *Sur* $\mathbf{R}$*, muni de sa topologie usuelle, la tribu borélienne est engendrée par*

1. *la classe des intervalles ouverts bornés,*
2. *la classe des segments*
3. *la classe des intervalles de la forme* $]-\infty,a[$ *avec* $a\in\mathbf{R}$*,*

4. *la classe des intervalles de la forme* $]-\infty, a]$ *avec* $a \in \mathbf{R}$,

Démonstration. Démontrons les points 1 et 3. Les autres sont laissés en exercice.

- Le point 1 est évident puisque tout ouvert est une union dénombrable d'intervalles ouverts
- Notons $\mathscr{C} = \{]-\infty, a[, a \in \mathbf{R}\}$. Si $a < b$, $[a, b[=]-\infty, b[\setminus]-\infty, a[\in \sigma(\mathscr{C})$ et

$$]a, b[= \bigcup_{n \geq 1} [a - 1/n, b[\in \sigma(\mathscr{C}).$$

Par conséquent $\mathscr{B}(\mathbf{R}) \subset \sigma(\mathscr{O})$. L'autre inclusion est évidente.

□

- Nous aurons aussi à considérer la droite achevée $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.
- Rappelons que sa topologie est définie par la base d'ouverts formés des intervalles ouverts de la forme $]a, b[$, $]a, +\infty]$ et $[-\infty, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$.
- On démontre de façon analogue que la tribu borélienne de $\overline{\mathbf{R}}$ est engendrée par les classes $\{[-\infty, a[,\ a \in \mathbf{R}\}$ ou $\{[-\infty, a],\ a \in \mathbf{R}\}$ par exemple.

Proposition. *La tribu borélienne de* $\mathbf{R}^d$ *est égale à la tribu engendrée par la classe des ouverts de la forme*

$$\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[\quad \textit{avec}\ \infty < a_i < b_i < +\infty.$$

- Rappelons que $\mathscr{O} \subset \mathscr{P}(E)$ est une topologie (l'ensemble des ouverts) sur E si
  1. $\emptyset$ et E appartiennent à $\mathscr{O}$,
  2. $\mathscr{O}$ est stable par intersection finie,
  3. $\mathscr{O}$ est stable par réunion quelconque.
- La tribu borélienne sur E, $\mathscr{B}(E)$ est la tribu engendrée par la classe des ouverts $\mathscr{O}$

2. Fonctions mesurables.

2.1. Définitions, critères de mesurabilité.

- Rappel : $f : E \longrightarrow F$ est continue si, pour tout ouvert $V \subset F$, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E.
- La définition d'une fonction mesurable est analogue.

Définition (Fonction mesurable)**.** Soient $(E, \mathscr{A})$ et $(F, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables et f une application de E dans F. On dit que f est mesurable par rapport à $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ si $f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$ c'est à dire

$$\forall B \in \mathscr{B}, \qquad f^{-1}(B) \in \mathscr{A}.$$

- L'image réciproque de tout ensemble mesurable est un ensemble mesurable.
- Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on ne précise pas les tribus de départ et d'arrivée

Exemple(s). La fonction $f(x) = \mathbf{1}_A(x)$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{A}$

Lemme. *Soient* $(E, \mathscr{A})$ *et* $(F, \mathscr{B})$ *deux espaces mesurables et* $f : E \longrightarrow F$ *une application. On suppose que* $\mathscr{B} = \sigma(D)$. *Alors* f *est mesurable si et seulement si*

$$\forall B \in \mathscr{D}, \qquad f^{-1}(B) \in \mathscr{A}.$$

Démonstration. • La condition est nécessaire.

- Si la tribu $\mathscr{A}$ contient $f^{-1}(\mathscr{D})$, alors

$$f^{-1}(\mathscr{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{D})) = \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right) \subset \mathscr{A}.$$

□

Corollaire. *Soient E et F deux espaces topologiques,* $f : E \longrightarrow F$ *une application continue. Alors* f *est mesurable par rapport aux tribus boréliennes* $\mathscr{B}(E)$ *et* $\mathscr{B}(F)$.

- On dit plus simplement que f est borélienne.

Démonstration. L'image réciproque d'un ouvert de F est un ouvert de E. Il suffit d'appliquer le lemme avec $\mathscr{B}(F) = \sigma(\mathscr{O}_F)$. □

Corollaire. *Soient* $(E, \mathscr{A})$ *un espace mesurable et* $f : E \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ *une application.* f *est borélienne si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. *pour tout réel* t, $\{x \in E : f(x) \leq t\} \in \mathscr{A}$ *;*
2. *pour tout réel* t, $\{x \in E : f(x) < t\} \in \mathscr{A}$.

- Cela résulte du lemme et du fait que $\mathscr{B}\left(\overline{\mathbf{R}}\right) = \sigma\left(\{[-\infty, t],\ t \in \mathbf{R}\}\right)$.

`2017/2018 : fin du cours 2`

2.2. Propriétés de stabilité.

Proposition (Stabilité par composition)**.** *Soient* f *mesurable de* $(E, \mathscr{A})$ *dans* $(F, \mathscr{B})$ *et* g *mesurable de* $(F, \mathscr{B})$ *dans* $(G, \mathscr{C})$. *Alors* $g \circ f$ *est mesurable de* $(E, \mathscr{A})$ *dans* $(F, \mathscr{C})$.

- Si $C \in \mathscr{C}$, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)$; $g^{-1}(C) \in \mathscr{B}$ car g est mesurable et, comme f est mesurable $f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right) \in \mathscr{A}$.

Proposition. *Soient* $(F_1, \mathscr{B}_1)$ *et* $(F_2, \mathscr{B}_2)$ *deux espaces mesurables et* p_1 *et* p_2 *les projections de* $F_1 \times F_2$ *sur* F_1 *et* F_2 *respectivement. On munit* $F_1 \times F_2$ *de la tribu produit* $\mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2$.

1. *Les projections p_1 et p_2 sont mesurables ;*
2. *Soit $(E,\mathscr{A})$ un espace mesurable et f une application de E dans $F_1 \times F_2$. Alors f est mesurable si et seulement si les composées $p_1 \circ f : E \to F_1$ et $p_2 \circ f : E \to F_2$ sont mesurables.*

- Généralisation immédiate au cas d'un produit de n termes

Démonstration. • Pour tout $B_1 \in \mathscr{B}_1$, $p_1^{-1}(B_1) = B_1 \times F_2 \in \mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2$.

- Si f est mesurable alors $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont mesurables. Réciproquement, si $B = B_1 \times B_2$ avec $B_1 \in \mathscr{B}_1$ et $B_2 \in \mathscr{B}_2$
$$f^{-1}(B_1 \times B_2) = f^{-1}(B_1 \times F_2 \cap F_1 \times B_2) = (p_1 \circ f)^{-1}(B_1) \cap (p_2 \circ f)^{-1}(B_2) \in \mathscr{A}.$$
f est donc mesurable puisque $\mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2$ est engendré par les pavés mesurables.

□

Corollaire. *Une fonction à valeurs complexes est mesurable si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont.*
Si f et g sont des fonctions mesurables de $(E,\mathscr{A})$ dans $\mathbf{C}$, alors $f+g$, fg, $|f|$, etc. sont mesurables.

- Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\overline{\mathbf{R}}$
$$\limsup x_n = \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} x_k, \qquad \liminf x_n = \sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} x_k.$$
  - $(x_n)_{n\geq 0}$ converge dans $\overline{\mathbf{R}}$ si et seulement si $\limsup x_n = \liminf x_n$.
- Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de E dans $\overline{\mathbf{R}}$. On note $\limsup f_n$ la fonction
$$\limsup f_n(x), \quad x \in E.$$

Proposition. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de $(E,\mathscr{A})$ dans $\left(\overline{\mathbf{R}}, \mathscr{B}\left(\overline{\mathbf{R}}\right)\right)$. Alors $\sup_{n\geq 0} f_n$, $\inf_{n\geq 0} f_n$, $\liminf f_n$, $\limsup f_n$ sont boréliennes.*

Démonstration. Pour $t \in \mathbf{R}$, on a
$$\{x \in E : \sup_{n\geq 0} f_n(x) \leq t\} = \bigcap_{n\geq 0} \{x \in E : f_n(x) \leq t\},$$
$$\{x \in E : \inf_{n\geq 0} f_n(x) \geq t\} = \bigcap_{n\geq 0} \{x \in E : f_n(x) \geq t\}.$$

□

Corollaire. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de $(E,\mathscr{A})$ dans $(\mathbf{C}, \mathscr{B}(\mathbf{C}))$. On suppose que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f. Alors f est mesurable.*

Exemple(s). Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ borélienne et dérivable. Alors f' est borélienne.

Proposition. *Soient f et g deux fonctions mesurables de $(E,\mathscr{A})$ dans $\overline{\mathbf{R}}$. Alors les ensembles $\{x \in E : f(x) < g(x)\}$ et $\{x \in E : f(x) \leq g(x)\}$ sont dans $\mathscr{A}$.*

- Attention on ne peut pas écrire $f - g$ dans $\overline{\mathbf{R}}$
- On écrit
$$\begin{aligned}\{x \in E : f(x) < g(x)\} &= \bigcup_{q\in\mathbf{Q}} \{x \in E : f(x) < q < g(x)\} \\ &= \bigcup_{q\in\mathbf{Q}} \left(\{x \in E : f(x) < q\} \cap \{x \in E : q < g(x)\}\right).\end{aligned}$$

2.3. Fonctions étagées et approximation.

- Soit $(E,\mathscr{A})$ un espace mesurable
- On note $\mathscr{M}(E,\mathscr{A})$, ou plus simplement $\mathscr{M}$, l'ensemble des fonctions $f : E \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ mesurables par rapport à $(E,\mathscr{A})$ et $\left(\overline{\mathbf{R}},\mathscr{B}\left(\overline{\mathbf{R}}\right)\right)$.
  - $\mathscr{M}_+$ est l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}_+$.

Définition (Fonction étagée)**.** Une fonction mesurable sur $(E,\mathscr{A})$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ est étagée lorsqu'elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

- On note $\mathscr{E}_+$ (resp. $\mathscr{E}$) l'ensemble des fonctions étagées à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ (resp. $\mathbf{C}$).
- Une fonction étagée ne prend qu'un nombre fini de valeurs finies : $f(E)$ est un ensemble fini de $\mathbf{C}$ et
$$f(x) = \sum_{y\in f(E)} y\,\mathbf{1}_{f^{-1}(\{y\})}(x) = \sum_{y\in f(E)} y\,\mathbf{1}_{\{y\}}(f(x)).$$
  - Si f prend les n valeurs distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, on a
$$\forall x \in E, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\mathbf{1}_{A_i}(x), \quad \text{où} \quad A_i = \{x \in E : f(x) = \alpha_i\}.$$

Théorème. *Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction mesurable. Alors, il existe une suite croissante $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f.*
De plus, la convergence est uniforme sur toute partie sur laquelle f est bornée.

`2017/2018 : fin du cours 3`

Démonstration. • Pour $n \geq 0$, on pose
$$f_n(x) = 2^{-n}\left[2^n \min(f(x),n)\right] = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\,\mathbf{1}_{A_{n,k}}(x) + n\,\mathbf{1}_{A_n}(x),$$
$$A_n = \{x\in E : f(x) \geq n\}, \quad A_{n,k} = \left\{x \in E : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\},\ k = 0,\dots,n2^n-1.$$

- f_n est une fonction étagée positive et $f_n \leq f$.
- $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f
  - Si $f(x) = +\infty$, $f_n(x) = n \longrightarrow +\infty = f(x)$.
  - Si $0 \leq f(x) < +\infty$, il existe n_0 tel que $f_n(x) = 2^{-n}\left[2^n f(x)\right]$ pour tout $n \geq n_0$ et
$$\left[2^n f(x)\right] \leq 2^n f(x) < \left[2^n f(x)\right] + 1, \qquad f_n(x) \leq f(x) < f_n(x) + 2^{-n}.$$
- La suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est croissante pour tout $x \in E$.
  - Si $f(x) = +\infty$, $f_n(x) = n$ pour tout n.

- Soient $x \in E$ tel que $0 \leq f(x) < +\infty$ et $n \in \mathbf{N}$.
  Si $f(x) \geq n$, $f_n(x) = n$

$$f_{n+1}(x) = 2^{-(n+1)}\left[2^{n+1}\min(f(x), n+1)\right] \geq 2^{-(n+1)}\left[2^{n+1}\min(n, n+1)\right] = n = f_n(x).$$

  Si $f(x) < n$, il existe un unique $k \in \{0, \ldots, n2^n - 1\}$ tel que $2^{-n}k \leq f(x) < 2^{-n}(k+1)$. On a alors $f_n(x) = 2^{-n}k$ et

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \frac{k}{2^n} = f_n(x), \quad \text{si} \quad \frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}}, \\ f_{n+1(x)} &= \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} > f_n(x), \quad \text{si} \quad \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}} = \frac{k+1}{2^n}. \end{aligned}$$

- Si f est bornée sur X, il existe n_0 tel que $f(x) \leq n_0$; pour tout $x \in X$ et tout $n \geq n_0$

$$\left[2^n f(x)\right] \leq 2^n f(x) < \left[2^n f(x)\right] + 1, \qquad 0 \leq f(x) - f_n(x) < 2^{-n}.$$

□

- Il faut bien comprendre que cette méthode d'approximation porte sur les valeurs de $f(x)$ pas celle de x
- On discrétise l'axe des ordonnées

Corollaire. *Toute fonction mesurable à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *(ou* $\mathbf{C}$*) est limite simple d'une suite de fonctions étagées à valeurs dans* $\mathbf{R}$ *(ou* $\mathbf{C}$*)*

- On applique le théorème à $f^+ = \max(f, 0)$ et à $f^- = \max(-f, 0)$ si f est à valeurs $\overline{\mathbf{R}}$. Si f est à valeurs dans $\mathbf{C}$, on applique le résultat aux parties réelle et imaginaire de f.

3. Mesures positives.

- Dans toute la suite, $(E, \mathscr{A})$ est un espace mesurable.

3.1. Définitions.

Définition. Une *mesure positive* sur $(E, \mathscr{A})$ est une application μ de $\mathscr{A}$ dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ vérifiant :

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathscr{A}$ avec $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$ alors

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n).$$

- Vocabulaire :
  - Si $\mu(E) < +\infty$, μ est dite finie ou bornée ;

- Si $\mu(E) = 1$, μ est une (mesure de) probabilité ;
- S'il existe $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{A}$ telle que $\cup A_n = E$ et $\mu(A_n) < +\infty$, μ est σ-finie ;
- Si μ est une mesure positive sur $(E, \mathscr{A})$, le triplet $(E, \mathscr{A}, \mu)$ s'appelle un espace mesuré.

Proposition. *Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux disjoints, alors*
$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n).$$
2. *Soient A et B deux parties de $\mathscr{A}$. Si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$. De plus, si $\mu(A) < +\infty$, $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*
3. *Si A et B sont dans $\mathscr{A}$, $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.*

- Attention, si $A \subset B$ sont deux éléments de $\mathscr{A}$, on peut toujours écrire $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ mais $\mu(B) - \mu(A)$ n'a de sens que si $\mu(A) < +\infty$.

Démonstration. • C'est la définition avec $A_0 = \emptyset$ et $A_i = \emptyset$ pour $i > n$.

- On a $B = A \cup (B \setminus A)$ avec A et $(B \setminus A)$ disjoints. D'où,
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A) \quad \text{puisque} \quad \mu(B \setminus A) \geq 0.$$
Si $\mu(A) < +\infty$, $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
- Si $\mu(A \cap B) = +\infty$, alors la formule est vraie : les quatre termes valent $+\infty$.
Si $\mu(A \cap B) < +\infty$, on considère la partition suivante de $A \cup B$
$$A \cup B = A \setminus (A \cap B) \bigcup B \setminus (A \cap B) \bigcup (A \cap B),$$
et d'après le point précédent
$$\begin{aligned}\mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).\end{aligned}$$

□

Exemple(s). 1. Masse de Dirac sur $(E, \mathscr{P}(E))$: $\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x)$.

2. Mesure de comptage sur $(E, \mathscr{P}(E))$: $\gamma(A) = |A|$ si A est fini, $\gamma(A) = +\infty$ sinon.

Définition. Un ensemble $N \subset E$ est négligeable pour μ si il existe $A \in \mathscr{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

- Attention, un ensemble peut être négligeable et ne pas être vide. Par exemple, $[2, +\infty[$ est négligeable pour δ_0.

- Attention, un ensemble peut être négligeable et ne pas appartenir à $\mathscr{A}$.

3.2. Propriétés des mesures positives.

Proposition. *Soient* $(E,\mathscr{A},\mu)$ *un espace mesuré et* $(B_n)_{\mathbf{N}}\subset\mathscr{A}$. *Alors,*

1. $\mu\big(\bigcup_{n\ge0}B_n\big)\le\sum_{n\ge0}\mu(B_n)$.
2. *Si* $B_n\subset B_{n+1}$ *pour tout* n,
$$\mu\big(\bigcup_{n\ge0}B_n\big)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\sup_{n\ge0}\mu(B_n).$$
3. *Si* $B_{n+1}\subset B_n$ *pour tout* n *et s'il existe* $n_0\in\mathbf{N}$ *tel que* $\mu(B_{n_0})<+\infty$,
$$\mu\big(\bigcap_{n\ge0}B_n\big)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\inf_{n\ge0}\mu(B_n).$$

- Attention, la propriété 3 est fausse sans l'hypothèse $\mu(B_{n_0})<+\infty$. Par exemple, si γ est la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$ et si B_n est l'ensemble des entiers supérieurs à n, $\mu(B_n)=+\infty$ et $\cap B_n=\emptyset$.

- Le point 2 permet de donner une définition équivalente de mesure positive.

`2017/2018 : fin du cours 4`

Démonstration. • La proposition résulte de la construction suivante. On pose $A_0=B_0$ et pour $n\ge1$, $A_n=B_n\setminus\cup_{k<n}B_k$. Alors, les ensembles $(A_n)_{n\ge0}$ sont deux à deux disjoints avec

$$A_n\subset B_n,\quad \bigcup_{0\le i\le n}A_i=\bigcup_{0\le i\le n}B_i,\quad \bigcup_{n\ge0}A_n=\bigcup_{n\ge0}B_n,\quad n\ge0.$$

- Pour le point 1,
$$\mu\big(\bigcup_{n\ge0}B_n\big)=\mu\big(\bigcup_{n\ge0}A_n\big)=\sum_{n\ge0}\mu(A_n)\le\sum_{n\ge0}\mu(B_n).$$

- Pour le point 2,
$$\begin{aligned}\mu\big(\bigcup_{n\ge0}B_n\big)&=\mu\big(\bigcup_{n\ge0}A_n\big)=\sum_{k\ge0}\mu(A_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\mu(A_k)=\lim_{n\to\infty}\mu\big(\bigcup_{0\le k\le n}A_k\big)\\&=\lim_{n\to\infty}\mu\big(\bigcup_{0\le k\le n}B_k\big)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)\end{aligned}$$

- Pour le point 3, on considère, pour $n\ge n_0$, $A_n=B_{n_0}\setminus B_n$ et on applique le point 2.

□

- En fait, la 2$^{\text{e}}$ propriété est caractéristique des mesures :

Proposition. *Soient* $(E,\mathscr{A})$ *un espace mesurable et* μ *une application de* $\mathscr{A}$ *dans* $\overline{\mathbf{R}}_+$. *Alors* μ *est une mesure positive si et seulement si*

1. $\mu(\emptyset)=0$;

2. *Pour A et B dans $\mathscr{A}$ disjoints,* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ *;*

3. *Pour* $(B_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{A}$ *croissante,* $\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) = \lim_{n\geq 0} \mu(B_n)$.

Démonstration. Nous avons déjà vu que la condition était nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties de $\mathscr{A}$ deux à deux disjointes. On obtient, posant $B_n = \cup_{0\leq k\leq n} A_k$, via les points 3 puis 2,

$$\mu\left(\bigcup A_k\right) = \mu\left(\bigcup B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n).$$

□

Corollaire (Lemme de Borel-Cantelli)**.** *Soit* $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{A}$ *telle que* $\sum_{n\geq n_0} \mu(A_n) < +\infty$. *Alors* $\mu\left(\limsup A_n\right) = 0$ *i.e.* $\limsup A_n = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k$ *est un ensemble négligeable.*

Démonstration. On a, pour tout n,

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\geq n} \mu(A_k)\ ;$$

C'est le reste d'une série convergente. □

- Dans $\overline{\mathbf{R}}_+$, on fait la convention $0 \times +\infty = 0$.

- On rappelle que si $(a_{k,n})_{k\geq 0, n\geq 0} \subset \overline{\mathbf{R}}_+$,

$$\sum_{k\geq 0} \sum_{n\geq 0} a_{k,n} = \sum_{n\geq 0} \sum_{k\geq 0} a_{k,n}.$$

Proposition. *Soient* $(\mu_k)_{k\geq 0}$ *une suite de mesures positives sur* $(E, \mathscr{A})$ *et* $(\alpha_k)_{k\geq 0} \subset \overline{\mathbf{R}}_+$. *Pour* $A \in \mathscr{A}$*, on pose*

$$\mu(A) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k \mu_k(A).$$

Alors μ *est une mesure positives sur* $(E, \mathscr{A})$.

Démonstration. C'est un très bon exercice. □

Proposition. *Soient* $(E, \mathscr{A}, \mu)$ *un espace mesurable,* $(F, \mathscr{B})$ *un espace mesuré et* $f : E \longrightarrow F$ *une application mesurable. Pour tout* $B \in \mathscr{B}$*, on pose*

$$f_*(\mu)(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right).$$

Alors $f_*(\mu)$ *est une mesure positive sur* $(F, \mathscr{B})$ *appelée* mesure image de μ par f.

- $f_*(\mu)$ est notée suivant les auteurs $f_\#(\mu)$, μ_f ou encore $\mu \circ f^{-1}$.

- En fait, on peut définir $f_*(\mu)$ sur la tribu

$$f_*(\mathscr{A}) = \left\{B \subset F : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\right\}.$$

Démonstration. Si $(B_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{B}$ sont 2 à 2 disjoints, il en va de même de $\left(f^{-1}(B_n)\right)_{n\geq 0} \subset \mathscr{A}$. Par suite,

$$f_*(\mu)\left(\bigcup B_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup B_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup f^{-1}(B_n)\right) = \sum \mu\left(f^{-1}(B_n)\right) = \sum f_*(\mu)(B_n).$$

□

3.3. Exemples de mesure positives.

3.3.1. Mesures discrètes.

- Sur $(E, \mathscr{P}(E))$, δ_x est une mesure de probabilité.
- Généralisation : *mesure de Bernoulli* sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$: $\mu = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$, avec $0 \leq p \leq 1$.

Définition (Mesures discrètes)**.** Soient $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. La mesure μ est discrète si il existe un ensemble (au plus) dénombrable $P = \{x_n : n \in \mathbf{N}\} \subset E$ tel que :

$$\forall A \in \mathscr{A}, \quad \mu(A) = \mu(A \cap P).$$

- Si μ est discrète, notant $p_n = \mu(\{x_n\})$, on a, pour $A \in \mathscr{A}$,

$$\mu(A) = \mu(A \cap P) = \sum_{n \geq 0} \mu(A \cap \{x_n\}) = \sum_{n \geq 0} \mu(\{x_n\}) \mathbf{1}_A(x_n) = \sum_{n \geq 0} p_n \delta_{x_n}(A).$$

- Tout point x_n tel que $p_n > 0$ est appelé atome de μ.
- Lorsque μ est discrète, $N \in \mathscr{A}$ est μ-négligeable si et seulement si N ne contient aucun atome.

Exemple(s). • Si $\sum p_n < +\infty$, μ finie ; si $\sum p_n = 1$, μ est une probabilité.

- Si $\lambda > 0$,

$$\mu = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n$$

  est une mesure de probabilité appelée loi de Poisson de paramètre λ.

- Si $\mu = \sum p_n \delta_{x_n}$ et f une application mesurable, alors $f_*(\mu)$ est discrète et

$$f_*(\mu) = \sum_{n \geq 0} p_n \delta_{f(x_n)}.$$

3.3.2. Mesure de Lebesgue.

- La mesure de Lebesque généralise la notion de longueur en dimension un, de volume en dimension supérieure
- La construction est assez délicate ; nous l'admettrons.

Théorème (Mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$)**.** *Il existe une unique mesure positive, λ, sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$ telle que, pour tous réels a et b avec $a < b$,*

$$\lambda(]a, b]) = b - a.$$

Cette mesure est appelée mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

- On voit facilement que, pour tout réel x, $\lambda(\{x\}) = 0$. En effet, pour tout $n \geq 1$,

$$\{x\} \subset]x - 1/n, x], \quad \text{et} \quad \lambda(\{x\}) \leq \lambda(]x - 1/n, x]) = 1/n.$$

- Par conséquent, pour tous réels a et b avec $a < b$,

$$\lambda([a,b]) = \lambda(]a,b[) = \lambda(]a,b]) = \lambda([a,b[) = b-a.$$

- On peut remarquer que pour tous réels a, b, x avec $a \le b$

$$\lambda(x+[a,b]) = \lambda([a,b]).$$

  - Cette propriété se généralise à tous les boréliens B : $\lambda(x+B) = \lambda(B)$.
  - C'est en fait une propriété caractéristique de la mesure de Lebesgue.

Théorème. *Soit μ une mesure positive sur $(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}))$ vérifiant $\mu([0,1]) = 1$ et invariante par translation : pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$, $\mu(x+B) = \mu(B)$.*
Alors μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

`2017/2018 : fin du cours 5`

Démonstration. • On montre d'abord que $\mu(\{0\}) = 0$. En effet, pour tout $n \ge 1$, par invariance par translation,

$$1 = \mu([0,1]) \ge \mu(\{k/n, 1 \le k \le n\}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\{k/n\}) = n\mu(\{0\}).$$

- On montre ensuite que $\mu(]0,1/n]) = 1/n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. On écrit

$$]0,1] = \bigcup\nolimits_{1\le k\le n}](k-1)/n, k/n], \qquad \mu(]0,1]) = \sum_{k=1}^{n} \mu(](k-1)/n, k/n]),$$

  et par invariance par translation

$$1 = \mu(]0,1]) = n\mu\left(]0,1/n]\right).$$

- Pour tous rationnels $q < r$, $\mu(]q,r]) = \mu(]0,r-q]) = r-q$. En effet, $q-r = m/n$ avec m et n deux entiers strictement positifs et, comme $]0,m/n] = \bigcup_{1\le k\le m}](k-1)/n, k/n]$,

$$\mu(]0,m/n]) = \sum_{k=1}^{m} \mu\left(](k-1)/n, k/n]\right) = m\mu(]0,1/n]) = m/n = q-r.$$

- Pour tous réels $a < b$, $\mu(]a,b]) = \mu(]0,b-a]) = b-a$. En effet, comme $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$, on peut choisir deux suite de rationnels $(q_n)_{n\ge0}$ et $(r_n)_{n\ge0}$ qui convergent vers $b-a$ telles que $q_n \le b-a \le r_n$. Par exemple, $q_n = 2^{-n}\left[2^n(b-a)\right]$ et $r_n = 2^{-n}\left([2^n(b-a)]+1\right)$. On a alors $]0,q_n] \subset]0,b-a] \subset]0,r_n]$ et, pour tout n,

$$q_n = \mu(]0,q_n]) \le \mu(]0,b-a]) \le \mu(]0,r_n]) = r_n.$$

  Il suffit de passer à la limite quand $n \to \infty$.

$\square$

- L'unicité de la mesure de Lebesgue vient d'un résultat général

Théorème (Unicité de deux mesures)**.** *Soit μ et ν deux mesures sur $(E,\mathscr{A})$. On suppose qu'il existe $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$, stable par intersection finie, telle que $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A}$ et*

$$\forall C \in \mathscr{C}, \qquad \mu(C) = \nu(C).$$

Alors $\mu = \nu$ sur $(E,\mathscr{A})$ c'est à dire

$$\forall A \in \mathscr{A}, \qquad \mu(A) = \nu(A),$$

dans les deux cas suivants :

1. *$\mu(E) = \nu(E) < +\infty$;*
2. *il existe $(C_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{C}$ telle que $\cup C_n = E$ et $\mu(C_n) = \nu(C_n) < +\infty$ pour tout n.*

- Notons qu'on peut toujours supposer que $\emptyset \in \mathscr{C}$.
- Les classes $\mathscr{C}$ les plus utilisées sont : $\{]-\infty,t] : t \in \mathbf{R}\}$, $\{]a,b] : -\infty < a < b < +\infty\}$, $\{]a,b[: -\infty < a < b < +\infty\}$, $\{[a,b] : -\infty < a \leq b < +\infty\}$, les compacts de $\mathbf{R}$, ceux de $\mathbf{R}^d$, sur $\mathbf{R}^d$ $\{]a,b[\times]c,d[: a < b, c < d\}$, etc.
  - Deux mesures finies sur les compacts de **R** qui coïncident sur les intervalles bornés sont égales sur $\mathscr{B}(\mathbf{R})$;
  - Deux mesures de probabilité sont égales si et seulement si

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad F_\mu(t) := \mu(]-\infty,t]) = \nu(]-\infty,t]) =: F_\nu(t).$$

- La construction de la mesure de Lebesgue s'étend en dimension quelconque

Théorème. *Il existe une unique mesure positive, λ_d, sur $\left(\mathbf{R}^d, \mathscr{B}\left(\mathbf{R}^d\right)\right)$, telle que :*

$$\lambda_d\left(]a_1,b_1] \times \ldots \times]a_d,b_d]\right) = (b_1-a_1)\ldots(b_d-a_d), \quad \forall a_i < b_i,\ i = 1,\ldots,d.$$

Cette mesure s'appelle la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$

- On montre facilement que

$$\lambda_d\left([a_1,b_1] \times \ldots \times [a_d,b_d]\right) = \lambda_d\left(]a_1,b_1[\times \ldots \times]a_d,b_d[\right) = (b_1-a_1)\ldots(b_d-a_d).$$

- λ_d est l'unique mesure positive invariante par translation telle que $\lambda_d\left([0,1]^d\right) = 1$.
- Plus généralement, λ_d est invariante par isométrie : si f est isométrie de $\mathbf{R}^d$ et B un ensemble borélien, $\lambda_d(f(B)) = \lambda_d(B)$.

Exercice. Dans $\mathbf{R}^2$, la mesure de Lebesgue des droites est nulle. D'après l'invariance par isométrie, il suffit de montrer que $\lambda_2(D) = 0$ où $D = \{(x,0) : x \in \mathbf{R}\}$. Montrons que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $\lambda_2([k,k+1[\times\{0\}) = 0$. En effet, si $k \in \mathbf{Z}$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$[k,k+1[\times\{0\} \subset [k,k+1[\times]-\varepsilon,+\varepsilon[, \quad \lambda_2\left([k,k+1[\times\{0\}\right) \leq \lambda_2\left([k,k+1[\times]-\varepsilon,+\varepsilon[\right) = 2\varepsilon.$$

Par conséquent, comme $D = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} [k,k+1[\times\{0\}$,

$$\lambda_2(D) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \lambda_2\left([k,k+1[\times\{0\}\right) = 0.$$

3.3.3. Mesure de Lebesgue-Stieltjes.

- Il s'agit d'une généralisation de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

Définition. Soit μ une mesure positive sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$. On dit que μ est une *mesure borélienne* si $\mu(K) < +\infty$ pour tout K compact de $\mathbf{R}$.

- μ est borélienne si et seulement si $\mu([-n, n])$ est fini pour tout n.

Proposition. *Soit μ une mesure borélienne. La fonction G de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par*

$$G(x) = -\mu(]x, 0]) \quad si\ x < 0, \qquad G(x) = \mu(]0, x]) \quad si\ x \geq 0,$$

est croissante et continue à droite. De plus, pour tous réels $a < b$,

$$\mu(]a, b]) = G(b) - G(a).$$

- G est croissante donc possède une limite à gauche en tout $y \in \mathbf{R}$, notée $G(y-)$.

- On a $\mu([a, b]) = G(b) - G(a-)$, $\mu(]a, b[) = G(b-) - G(a)$, $\mu([a, b[) = G(b-) - G(a-)$.

Remarque(s). Lorsque μ est finie, on utilise plutôt sa *fonction de répartition F_μ* :

$$F_\mu(t) = \mu(]-\infty, t]), \quad t \in \mathbf{R}.$$

F_μ est croissante, continue à droite, $\lim_{t\to-\infty} F_\mu(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} F_\mu(t) = \mu(E)$ et, pour $a < b$, $\mu(]a, b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$. En fait, $G(t) = F_\mu(t) - F_\mu(0)$.

Théorème (Mesure de Lebesgue-Stieltjes)**.** *Soit $G : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction croissante et continue à droite. Il existe une unique mesure positive sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$ telle que :*

$$\forall a < b, \quad \mu(]a, b]) = G(b) - G(a).$$

La mesure positive ainsi définie s'appelle la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à G.

- La mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ correspond à $G(x) = x$.

- Si G et F diffère d'une constante, elle définisse la même mesure de Lebesgue-Stieltjes.

- Toute mesure borélienne est entièrement caractérisée par la fonction

$$G(x) = -\mu(]x, 0]) \quad \text{si } x < 0, \qquad G(x) = \mu(]0, x]) \quad \text{si } x \geq 0,$$

  - Si μ est finie, elle est aussi caractérisée par $F_\mu(t) = \mu(]-\infty, t])$, $t \in \mathbf{R}$.

Exercice. Soit μ la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à F donnée par

$$F(x) = 0 \quad \text{si } x < 0, \qquad F(x) = x \quad \text{si } 0 \leq x < 1, \qquad F(x) = 1 \quad \text{si } x \geq 1.$$

Déterminons $\nu = f_*(\mu)$ où $f(x) = \min(x, x_0)$ avec $0 < x_0 < 1$.

Remarquons que μ est une mesure de probabilité : en effet, $\mu(\mathbf{R}) = \lim_{n\to\infty} \mu([-n,n])$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$\mu([-n,n]) = F(n) - F(-n) = 1 = \mu([0,1]).$$

Il en va de même de ν. Pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$F_\nu(t) := f_*(\mu)(]-\infty,t]) = \mu\left(f^{-1}(]-\infty,t])\right) = \mu(\{x \in \mathbf{R} : \max(x,x_0) \leq t\}).$$

Si $t \geq x_0$, $\{x \in \mathbf{R} : \max(x,x_0) \leq t\} = \mathbf{R}$ et $f_*(\mu)(]-\infty,t]) = 1$.
Si $t < x_0$, $\{x \in \mathbf{R} : \max(x,x_0) \leq t\} =]-\infty,t]$ et

$$f_*(\mu)(]-\infty,t]) = \mu(]-\infty,t]) = \lim_{n\to\infty} \mu(]-n,t]) = F(t).$$

Par conséquent,

$$F_\nu(t) = 0 \quad \text{si } t < 0, \qquad F_\nu(t) = t \quad \text{si } 0 \leq t < x_0, \qquad F_\nu(t) = 1 \quad \text{si } t \geq x_0,$$

et ν est le mesure de Lebesgue-Stieltjes associée F_ν.

`2017/2018 : fin du cours 6`