Espaces L^p et convolution

1. Espaces $\mathscr{L}^p$ et L^p.

- Soit E un espace vectoriel sur **R** ou **C**.
- Une norme sur E est une application $\|\cdot\|$ de E dans $\mathbf{R}_+$ vérifiant
  1. $\|x\| = 0$ équivaut à $x = 0$;
  2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) ;
  3. $\|cx\| = |c|\,\|x\|$ ($c \in \mathbf{R}$, $x \in E$).
- L'exemple le plus simple, outre la valeur absolue sur **R**, est la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^2$

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

- On rappelle d'autre part que, pour $p \geq 1$,

$$\|(x_1,\ldots,x_d)\| = \left(x_1^p + \ldots + x_d^p\right)^{1/p}$$

  est une norme sur $\mathbf{R}^d$.

  - Les normes sont aussi notées $|x|$ …

- $(E,\mathscr{A},\mu)$ est un espace mesuré ;
- Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ ou **C** une application mesurable ;
- Pour $p \geq 1$, on définit

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \,\mu(dx)\right)^{1/p}$$

- Pour $p = \infty$,

$$\|f\|_\infty = \inf\left\{c \in \overline{\mathbf{R}}_+ : |f(x)| \leq c \;\; \mu-p.p.\right\}.$$

  - Trivialement, $\|f\|_\infty \leq \sup_{x\in E} |f(x)|$;
  - Par ailleurs, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ μ-presque partout ; en effet, c'est trivial si $\|f\|_\infty = +\infty$ et sinon,

$$\{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n\geq 1} \left\{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\right\}$$

    est négligeable.

- Pour $1 \leq p \leq \infty$, on pose

$$\mathscr{L}^p = \left\{ f : E \longrightarrow \mathbf{C} \text{ mesurable} : \|f\|_p < +\infty \right\}.$$

Proposition (Inégalité de Minskowski)**.** *Soit* $1 \leq p \leq \infty$. *Soient* f *et* g *de* E *dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *ou* $\mathbf{C}$ *mesurables.*

1. $\|f\|_p = 0$ *équivaut à* $f = 0$ μ*-p.p.;*
2. *Pour tout réel c,* $\|cf\|_p = |c|\,\|f\|_p$ *;*
3. $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ *(Inégalité de Minkowski).*

Remarque(s). Par convergence monotone, si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions mesurables et positives, alors

$$\left\| \sum_{n\geq 0} u_n \right\|_p \leq \sum_{n\geq 0} \|u_n\|_p.$$

Démonstration. Les points 1 et 2 sont triviaux. Le point 3 est trivial si $p = 1$ et $p = +\infty$ et si $\|f\|_p$ ou $\|g\|_p$ valent 0 ou $+\infty$. Il suffit donc de montrer l'inégalité de Minkowski dans le cas $1 < p < +\infty$ et $0 < \|f\|_p < +\infty$, $0 < \|g\|_p < +\infty$. Cela revient à montrer que

$$\int_E \left| \frac{f(x)+g(x)}{\|f\|_p + \|g\|_p} \right|^p \mu(dx) \leq 1$$

Puisque la fonction $x \longmapsto x^p$ est convexe, on a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x)+g(x)}{\|f\|_p + \|g\|_p} \right|^p \leq \left(\frac{|f(x)|+|g(x)|}{\|f\|_p + \|g\|_p} \right)^p &= \left(\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_p} \right)^p, \\
&\leq \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|g(x)|^p}{\|g\|_p^p}.
\end{aligned}$$

Il suffit alors d'intégrer par rapport à μ. □

Remarque(s). $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $\mathscr{L}_p$. Pour en faire une norme, on considère la relation d'équivalence $f\mathscr{R}g$ si $f = g$ μ-p.p. et on considère l'espace quotient

$$\mathrm{L}^p = \mathscr{L}^p / \mathscr{R}$$

ce qui signifie qu'on identifie deux fonctions égales μ-p.p.

Théorème. *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$. $\left(\mathrm{L}^p, \|\cdot\|_p\right)$ *est un espace complet.*
Plus précisément, si $(f_n)_{n\geq 0}$ *est une suite de Cauchy dans* $\mathscr{L}^p$*, il existe une sous-suite convergeant* μ*-p.p. et dans* $\mathscr{L}^p$*.*

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tous $n \geq N$, $m \geq N$, $\|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon$.

- Commençons par le cas $p = +\infty$. On construit une sous-suite $(\nu(n))_{n\geq 0}$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|f_l - f_k\|_\infty \leq 2^{-n}$ si $l \geq \nu(n)$, $k \geq \nu(n)$. En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\|f_{\nu(n+1)} - f_{\nu(n)}\|_\infty \leq 2^{-n}, \qquad |f_{\nu(n+1)}(x) - f_{\nu(n)}(x)| \leq 2^{-n}, \quad \mu - p.p.$$

  Par conséquent, la série $f_{\nu(0)} + \sum_{k\geq 0} \left(f_{\nu(k+1)} - f_{\nu(k)}\right)$ converge μ-p.p. Notons f la limite. On a également, $\|f - f_k\|_\infty \leq 2^{-n}$ pour tout $k \geq \nu(n)$.

- Traitons à présent le cas $1 \le p < +\infty$. Soit $\alpha > 2$. On construit une sous-suite $(\nu(n))_{n\ge 0}$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|f_l - f_k\|_p \le \alpha^{-n}$ si $l \ge \nu(n)$, $k \ge \nu(n)$. En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, d'après l'inégalité de Markov

  $$\|f_{\nu(n+1)} - f_{\nu(n)}\|_p \le \alpha^{-n}, \quad \mu\{x : |f_{\nu(n+1)}(x) - f_{\nu(n)}(x)| > 2^{-n}\} \le 2^{np}\,\|f_{\nu(n+1)} - f_{\nu(n)}\|_p^p \le (2/\alpha)^{np}.$$

  Notons $A_n = \{x : |f_{\nu(n+1)}(x) - f_{\nu(n)}(x)| > 2^{-n}\}$. Puisque $\sum \mu(A_n) < +\infty$, d'après le lemme de Borel-Cantelli, $\mu\big(\limsup A_n\big) = \mu\left(\cap_n \cup_{k\ge n} A_k\right) = 0$. Pour $x \in \big(\limsup A_n\big)^n = \cup_n \cap_{k\ge n} A_k^c$, il existe n tel que pour tout $k \ge n$, $|f_{\nu(k+1)}(x) - f_{\nu(k)}(x)| \le 2^{-k}$.

  Par conséquent, la série $f_{\nu(0)} + \sum_{k\ge 0}\big(f_{\nu(k+1)} - f_{\nu(k)}\big)$ converge μ-p.p. Notons f la limite. On a $\|f - f_k\|_p \le \alpha^{-n}$ pour tout $k \ge \nu(n)$.

□

- Soit $p \in [1, +\infty]$. On appelle exposant conjugué de p, noté q ou p^*, le nombre $q \in [1, +\infty]$ tel que : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
  - $q = 1$ si $p = +\infty$;
  - $q = +\infty$ si $p = 1$;
  - $q = \dfrac{p}{p-1}$ si $1 < p < +\infty$.

Proposition (Inégalité de Hölder)**.** *Soient f et g deux fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$. Soit $p \in [1, +\infty]$ et q l'exposant conjugué de p. Alors,*

$$\int_E |f(x)g(x)|\,\mu(dx) \le \|f\|_p\,\|g\|_q.$$

Démonstration. Si $p = 1$ ou $p = +\infty$, le résultat est immédiat. Dans le cas où $1 < p < +\infty$, le seul cas intéressant est celui où $0 < \|f\|_p < +\infty$ et $0 < \|g\|_q < +\infty$. Il suffit alors de montrer que

$$\int_E \left|\frac{f(x)g(x)}{\|f\|_p\,\|g\|_q}\right| \mu(dx) \le \int_E \frac{|f(x)|\,|g(x)|}{\|f\|_p\,\|g\|_q}\,\mu(dx) \le 1.$$

La fonction $x \longmapsto \ln x$ étant concave, pour tous $0 < \alpha < 1$, $x > 0$, $y > 0$,

$$\ln\big(\alpha\, x + (1-\alpha)\, y\big) \ge \alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y, \quad \text{i.e.} \quad x^\alpha y^{1-\alpha} \le \alpha\, x + (1-\alpha)\, y.$$

Par conséquent,

$$\frac{|f(x)|\,|g(x)|}{\|f\|_p\,\|g\|_q} = \left(\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}\right)^{1/p} \left(\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}\right)^{1/q} \le \frac{1}{p}\,\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Il suffit alors d'intégrer par rapport à μ. □

Exemple(s). Soient $1 < p < +\infty$ $f \in \mathscr{L}^p(\lambda_d)$. Alors, pour $\alpha > d(p-1)/p$, $x \longmapsto f(x)\,(1 + \|x\|)^{-\alpha}$ est intégrable. En effet, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\int_{\mathbf{R}^d} \frac{|f(x)|}{1 + \|x\|^\alpha}\,\lambda_d(dx) \le \|f\|_p \left(\int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{(1 + \|x\|)^{\alpha p/(p-1)}}\,\lambda_d(dx)\right)^{(p-1)/p} < +\infty.$$

2. Espaces $\mathscr{L}^p$ et approximation.

- Dans tout ce paragraphe, on travaille sur l'espace mesuré $\left(\mathbf{R}^d, \mathscr{B}\left(\mathbf{R}^d\right), \lambda_d\right)$.

Théorème (Admis)**.** *Soit* $1 \leq p < +\infty$. *L'espace* $\mathscr{C}_c\left(\mathbf{R}^d\right)$ *des fonctions continues à support compact est contenu et dense dans* $\mathscr{L}^p$

2017/2018 : fin du cours 15

- Soient f une fonction mesurable et $h \in \mathbf{R}^d$. On note $\tau_h(f)$ la fonction

$$\tau_h(f)(x) = f(x-h), \quad x \in \mathbf{R}^d.$$

Corollaire. *Soient* $1 \leq p < +\infty$ *et* $f \in \mathscr{L}^p$. *Alors* $\tau_h(f)$ *converge vers* f *dans* $\mathscr{L}^p$ *si* h *tend vers 0.*

Démonstration. Soit g une fonction continue à support compact. D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|f - \tau_h(f)\|_p \leq \|f-g\|_p + \|g - \tau_h(g)\|_p + \|\tau_h(g) - \tau_h(f)\|_p = 2\|f-g\|_p + \|g - \tau_h(g)\|_p.$$

Par convergence dominée, $\lim_{h \to 0} \|g - \tau_h(g)\|_p = 0$ et comme $\mathscr{C}_c$ est dense dans $\mathscr{L}^p$,

$$\limsup_{h \to 0} \|f - \tau_h(f)\|_p \leq \inf\left\{\|f-g\|_p : g \in \mathscr{C}_c\right\} = 0.$$

□

- Soit $f \in \mathscr{L}^1$. On a $\lim_{|t| \to \infty} \widehat{f}(t) = 0$. En effet, comme $e^{i\pi} = -1$,

$$2\widehat{f}(t) = \int f(x) e^{itx} dx - \int f(x) e^{itx + i\pi} dx = \int f(x) e^{itx} dx - \int f(x - \pi/t) e^{itx} dx$$

  et donc

$$2\left|\widehat{f}(t)\right| \leq \|f - \tau_{\pi/t}(f)\|_1.$$

- Soient $f : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{C}$ et $g : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{C}$ mesurables.
- On appelle produit de convolution de f et g la fonction

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x-y) g(y)\, dy = \int_{\mathbf{R}^d} f(y) g(x-y) dy$$

  - $f * g$ est définie en tout point x de $\mathbf{R}^d$ où

$$\int_{\mathbf{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\, dy < +\infty.$$

Proposition. *Soient* $f \in \mathscr{L}^p$ *et* $g \in \mathscr{L}^q$ *où* $p^{-1} + q^{-1} = 1$ *et* $1 \leq p \leq +\infty$. *Alors* $f * g$ *est définie en tout point de* $\mathbf{R}^d$ *et bornée :*

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \qquad |f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Démonstration. C'est l'inégalité de Hölder. □

Proposition. *Soient $f \in \mathscr{L}^p$ avec $1 \le p < +\infty$ et $g \in \mathscr{L}^1$. Alors $f * g$ est définie presque partout et $f * g \in \mathscr{L}^p$. Plus précisément,*

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1.$$

Démonstration. • Commençons par le cas $p = 1$. On a alors

$$\int \int |f|(x-y)|g|(y) dy dx = \|f\|_1 \|g\|_1 \ ;$$

Par conséquent, d'après le théorème de Fubini, la fonction $x \longmapsto \int f(x-y)g(y)dy$ est définie presque partout et intégrable. On a par ailleurs,

$$\|f * g\|_1 \le \int \int |f|(x-y)|g|(y) dy dx = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

- Passons au cas $p > 1$. Soit q l'exposant conjugué de p. On a, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\int |f|(x-y)|g|(y)\, dy = \int |f(x-y)||g(y)|^{1/p} |g(y)|^{1/q}\, dy \le \left(\int |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right)^{1/p} \|g\|_1^{1/q}$$

Par conséquent,

$$\int \left(\int |f|(x-y)|g|(y)\, dy \right)^p dx \le \int \int |f(x-y)|^p |g(y)|\, dy dx\, \|g\|_1^{p/q} = \|f\|_p^p \|g\|_1^{1+p/q}.$$

Ceci montre que la fonction $\int |f|(x-y)|g|(y)\, dy$ est finie presque partout : $f * g$ est définie p.p. De plus,

$$\|f * g\|_p^p \le \int \left(\int |f|(x-y)|g|(y)\, dy \right)^p dx \le \int \int |f(x-y)|^p |g(y)|\, dy dx \|g\|_1^{p/q} = \|f\|_p^p \|g\|_1^{1+p/q},$$

c'est à dire $\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1$.

□

- Soit $g : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction positive, intégrable telle que

$$\int_{\mathbf{R}^d} g(x)\, \lambda_d(dx) = 1.$$

- Pour tout $\alpha > 0$, on pose $g_\alpha(x) = \alpha^d g(\alpha x)$. On a, via $y = \alpha x$,

$$\int_{\mathbf{R}^d} g_\alpha(x)\, \lambda_d(dx) = \int_{\mathbf{R}^d} g(y)\, \lambda_d(dy) = 1.$$

- On utilise souvent les fonctions

$$g(x) = (2\pi)^{-d/2} \exp\left(-\|x\|^2/2\right), \quad g(x) = C \exp\left(-\left(1 - \|x\|^2\right)^{-1}\right) \mathbf{1}_{\|x\|<1}.$$

Proposition. *Soient $1 \le p < +\infty$ et $f \in \mathscr{L}^p$. Alors $f * g_\alpha$ converge vers f dans $\mathscr{L}^p$ quand α tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Commençons par observer que, pour $x \in \mathbf{R}^d$,

$$(f * g_\alpha)(x) = \int f(x-y) g_\alpha(y)\, dy = \int f(x - z/\alpha) g(z)\, dz, \qquad f(x) = \int f(x) g(z)\, dz.$$

Par conséquent, comme g est positive,

$$\left|(f * g_\alpha)(x) - f(x)\right| \le \int \left|f(x - z/\alpha) - f(x)\right| g(z)\, dz.$$

Par conséquent, le calcul de la démonstration précédente conduit à

$$\left\|(f * g_\alpha) - f\right\|_p \le \left\|\tau_{1/\alpha}(f) - f\right\|_p \|g\|_1 = \left\|\tau_{1/\alpha}(f) - f\right\|_p.$$

Le résultat s'en suit immédiatement. □

`2017/2018 : fin du cours 16`