L'intégrale de Lebesgue

- Dans toute la suite, $(E,\mathscr{A},\mu)$ est un espace mesuré.
- On rappelle la convention, $0\times+\infty=0$.

1. Intégrale de fonctions positives.

- $f:E\longrightarrow\mathbf{C}$ est étagée si f est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs
  - On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions étagées,
  - $\mathscr{E}_+$ désigne l'ensemble des fonctions étagées à valeurs dans $\mathbf{R}_+$
- Si f est étagée, f s'écrit comme une somme finie :

$$f(x)=\sum_{y\in f(E)} y\,\mathbf{1}_{f^{-1}(\{y\})}(x)=\sum_{y\in f(E)} y\,\mathbf{1}_{\{x\in E:f(x)=y\}}(x).$$

  - C'est l'écriture canonique de f.

Définition. Soit f une fonction étagée positive. On appelle intégrale de f sur E par rapport à μ, l'élément de $\overline{\mathbf{R}}_+$ suivant :

$$\int_E f(x)\,\mu(dx)=\int f\,d\mu=\sum_{y\in f(E)} y\,\mu\big(f^{-1}(\{y\})\big).$$

- Certains auteurs utilisent la notation $\int_E f(x)\,d\mu(x)$.

Exemple(s). • Soient $A\in\mathscr{A}$ et $f(x)=\mathbf{1}_A(x)$. On a $f(E)=\{0,1\}$, $A=f^{-1}(\{1\})$, $A^c=f^{-1}(\{0\})$ et

$$f(x)=\mathbf{1}_A(x)+0\times\mathbf{1}_{A^c}(x)=\mathbf{1}_{f^{-1}(\{1\})}+0\times\mathbf{1}_{f^{-1}(\{0\})}.$$

par conséquent,

$$\int_E f(x)\,\mu(dx)=\mu\big(f^{-1}(\{1\})\big)+0\times\mu\big(f^{-1}(\{0\})\big)=\mu(A).$$

- Si f est une fonction positive en escalier

$$f(x)=\sum_{i=1}^n\alpha_k\mathbf{1}_{](k-1)/n,k/n[},\qquad \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\lambda(dx)=\sum_{i=1}^n\alpha_k\,\lambda(](k-1)/n,k/n[)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\alpha_k.$$

Lemme. *Soit f une fonction étagée positive. On suppose que f s'écrit*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(x), \quad x \in E,$$

où $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles de $\mathscr{A}$ deux à deux disjoints et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels positifs. Alors,

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\mu(A_i).$$

- Par exemple, si $f(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, on peut écrire

$$f(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) + 0\,\mathbf{1}_{[0,1]^c}(x) = \mathbf{1}_{[0,1/2]}(x) + \mathbf{1}_{]1/2,1]}(x),$$

  et le lemme dit simplement que

$$\int_E f(x)\mu(dx) = \mu([0,1]) = \mu([0,1/2]) + \mu(]1/2,1]).$$

Démonstration. On peut toujours supposer que $(A_i)_{1\le i\le n}$ est une partition de E. Sinon, on pose $A_{n+1} = (\cup_{1\le i\le n} A_i)^c$ et $\alpha_{n+1} = 0$. Dans ce cas, $n \ge \mathrm{card}(f(E))$.
Si $y \in f(E)$, on a $f^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{i\in I(y)} A_i$ où $I(y) = \{i : \alpha_i = y\}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,\mu(dx) &= \sum_{y\in f(E)} y\,\mu\big(f^{-1}(\{y\})\big) = \sum_{y\in f(E)} y \sum_{i\in I(y)} \mu(A_i) = \sum_{y\in f(E)} \sum_{i\in I(y)} y\,\mu(A_i)\\ &= \sum_{y\in f(E)} \sum_{i\in I(y)} \alpha_i\,\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\mu(A_i).\end{aligned}$$

□

Proposition. *Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{E}_+$, α un réel positif. Alors,*

$$\int_E \alpha f(x)\,\mu(dx) = \alpha \int_E f(x)\,\mu(dx), \qquad \int_E (f+g)(x)\,\mu(dx) = \int_E f(x)\,\mu(dx) + \int_E g(x)\,\mu(dx).$$

De plus, si $f(x) \le g(x)$ pour tout $x \in E$, alors

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) \le \int_E g(x)\,\mu(dx).$$

Démonstration. La première assertion est triviale pour $\alpha = 0$. Si $\alpha > 0$,

$$f(x) = \sum_{y\in f(E)} y\,\mathbf{1}_{f^{-1}(\{y\})}, \qquad \alpha f(x) = \sum_{y\in f(E)} \alpha y\,\mathbf{1}_{f^{-1}(\{y\})}\ ;$$

par conséquent,

$$\int_E \alpha f(x)\,\mu(dx) = \sum_{y\in f(E)} \alpha y\,\mu\big(f^{-1}(\{y\})\big) = \alpha \sum_{y\in f(E)} y\,\mu\big(f^{-1}(\{y\})\big) = \alpha \int_E f(x)\,\mu(dx).$$

Pour la seconde, on considère la partition de E, $\big(f^{-1}(\{y\})\cap g^{-1}(\{z\}) : y\in f(E), z\in g(E)\big)$ et on écrit

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{y\in f(E)} y\,\mathbf{1}_{f^{-1}(\{y\})} = \sum_{y\in f(E)} y \sum_{z\in g(E)} \mathbf{1}_{f^{-1}(\{y\})\cap g^{-1}(\{z\})} = \sum_{y\in f(E)}\sum_{z\in g(E)} y\,\mathbf{1}_{f^{-1}(\{y\})\cap g^{-1}(\{z\})},\\
g(x) &= \sum_{z\in g(E)} z\,\mathbf{1}_{g^{-1}(\{z\})} = \sum_{z\in g(E)} z \sum_{y\in f(E)} \mathbf{1}_{f^{-1}(\{y\})\cap g^{-1}(\{z\})} = \sum_{y\in f(E)}\sum_{z\in g(E)} z\,\mathbf{1}_{f^{-1}(\{y\})\cap g^{-1}(\{z\})},\\
(f+g)(x) &= \sum_{y\in f(E)}\sum_{z\in g(E)} (y+z)\,\mathbf{1}_{f^{-1}(\{y\})\cap g^{-1}(\{z\})}.
\end{aligned}
$$

D'après le lemme,

$$
\begin{aligned}
\int_E (f+g)(x)\,\mu(dx) &= \sum_{y\in f(E)}\sum_{z\in g(E)} (y+z)\,\mu\big(f^{-1}(\{y\})\cap g^{-1}(\{z\})\big),\\
&= \sum_{y\in f(E)}\sum_{z\in g(E)} y\,\mu\big(f^{-1}(\{y\})\cap g^{-1}(\{z\})\big) + \sum_{y\in f(E)}\sum_{z\in g(E)} z\,\mu\big(f^{-1}(\{y\})\cap g^{-1}(\{z\})\big),\\
&= \int_E f(x)\,\mu(dx) + \int_E g(x)\,\mu(dx).
\end{aligned}
$$

Pour la dernière, puisque $f(x)\le g(x)$ pour tout $x\in E$, si $y\in f(E)$ et $z\in g(E)$ alors $y\le z$ dès que $f^{-1}(\{y\})\cap g^{-1}(\{z\}$ est non vide et, comme $\mu(\emptyset)=0$,

$$
\begin{aligned}
\int_E f(x)\,\mu(dx) &= \sum_{y\in f(E)}\sum_{z\in g(E)} y\,\mu\big(f^{-1}(\{y\})\cap g^{-1}(\{z\})\big)\\
&\le \sum_{y\in f(E)}\sum_{z\in g(E)} z\,\mu\big(f^{-1}(\{y\})\cap g^{-1}(\{z\})\big) = \int_E g(x)\,\mu(dx).
\end{aligned}
$$

□

- Une conséquence importante de cette proposition est le fait que, si

$$
f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\,\mathbf{1}_{A_i}(x), \quad \text{alors} \quad \int_E f(x)\,\mu(dx) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\,\mu(A_i),
$$

  dès que les α_i sont positifs et les ensembles A_i éléments de $\mathscr{A}$.

  - Il n'est pas nécessaire que les A_i soient deux à deux disjoints.

- Si $A\in\mathscr{A}$ et $f\in\mathscr{E}_+$, $f\mathbf{1}_A\in\mathscr{E}_+$. On pose

$$
\int_A f(x)\,\mu(dx) = \int_E f(x)\mathbf{1}_A(x)\,\mu(dx).
$$

Proposition. *Soit $f\in\mathscr{E}_+$. L'application ν de $\mathscr{A}$ dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ définie par*

$$
\nu(A) = \int_A f(x)\,\mu(dx)
$$

est une mesure positive sur $(E,\mathscr{A})$.

- En effet,
$$\int_A f(x)\,\mu(dx) = \int_E f(x)\mathbf{1}_A(x)\,\mu(dx) = \sum_{y\in f(E)} y\mu\big(A\cap f^{-1}(\{y\})\big).$$

- L'ensemble des fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ est noté $\mathscr{M}_+$.

Définition. Soit $f\in\mathscr{M}_+$. On appelle intégrale de f par rapport à μ l'élément de $\overline{\mathbf{R}}_+$ suivant :
$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \sup\left\{\int_E u(x)\,\mu(dx) : u\in\mathscr{E}_+, u\le f\right\}.$$

- Si $f\in\mathscr{M}_+$, il existe $(f_n)_{n\ge0}\in\mathscr{E}_+$, croissante, telle que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x\in E$. On s'attend donc à ce que
$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\,\mu(dx) = \sup_{n\ge0}\int_E f_n(x)\,\mu(dx).$$
  - C'est ce que nous vérifierons dans la suite.
- Remarquons également que si $f\in\mathscr{E}_+$, cette définition coïncide avec la précédente. En effet,
$$\sup\left\{\int_E u(x)\,\mu(dx) : u\in\mathscr{E}_+, u\le f\right\} = \max\left\{\int_E u(x)\,\mu(dx) : u\in\mathscr{E}_+, u\le f\right\} = \int_E f(x)\,\mu(dx),$$
puisqu'on peut prendre pour fonction u la fonction f elle-même si $f\in\mathscr{E}_+$.

Proposition (Croissance de l'intégrale)**.** *Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{M}_+$ telles que, pour tout $x\in E$, $f(x)\le g(x)$. Alors,*
$$\int_E f(x)\,\mu(dx) \le \int_E g(x)\,\mu(dx).$$

Démonstration. Puisque $g\ge f$, si $u\le f$ alors $u\le g$. Donc $\{u\in\mathscr{E}_+, u\le f\}\subset\{u\in\mathscr{E}_+, u\le g\}$ et
$$\sup\left\{\int_E u(x)\,\mu(dx) : u\in\mathscr{E}_+, u\le f\right\} \le \sup\left\{\int_E u(x)\,\mu(dx) : u\in\mathscr{E}_+, u\le g\right\}.$$
□

Théorème (Convergence monotone)**.** *Soient $f\in\mathscr{M}_+$ et $(f_n)_{n\ge0}\subset\mathscr{M}_+$ une suite croissante telles que* $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ *pour tout $x\in E$. Alors,*
$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\,\mu(dx) = \sup_{n\in\mathbf{N}}\int_E f_n(x)\,\mu(dx) = \int_E f(x)\,\mu(dx).$$

- $(f_n)_{n\ge0}\subset\mathscr{M}_+$ suite croissante signifie que
$$\forall x\in E,\quad \forall n\in\mathbf{N},\qquad f_n(x)\le f_{n+1}(x).$$

- Le résultat se réécrit
$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\,\mu(dx) = \int_E\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n\Big)(x)\,\mu(dx).$$

- Ce théorème est connu aussi sous le nom de « propriété de Beppo-Levi ».

Démonstration. • La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ étant croissante, on a $f_n \leq f$ et, par croissance de l'intégrale,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\,\mu(dx) = \sup_{n\in\mathbf{N}}\int_E f_n(x)\,\mu(dx) \leq \int_E f(x)\,\mu(dx).$$

- Montrons que
$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \sup\left\{\int_E u(x)\,\mu(dx) : u\in\mathscr{E}_+, u\leq f\right\} \leq \sup_{n\in\mathbf{N}}\int_E f_n(x)\,\mu(dx).$$

  Il s'agit de montrer que, pour toute $u\in\mathscr{E}_+$ telle que $0\leq u\leq f$, on a
$$\int_E u(x)\,\mu(dx) \leq \sup_{n\in\mathbf{N}}\int_E f_n(x)\,\mu(dx).$$

  Soient $u\in\mathscr{E}_+$ telle que $u\leq f$ et $0<c<1$. Considérons, pour tout $n\in\mathbf{N}$, l'ensemble
$$E_n = \{x\in E : f_n(x)\geq cu(x)\}.$$

  Puisque la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est croissante, la suite $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante pour l'inclusion. Si $u(x)=0$ alors $x\in E_0$ puisque f_0 est positive. Pour tout $x\in E$ tel que $u(x)>0$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)\geq u(x) > cu(x)$ puisque $0<c<1$. Il existe donc $n\in\mathbf{N}$ tel que $f_k(x) > cu(x)$ pour tout $k\geq n$. Autrement dit, $E=\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n$.

`2017/2018 : fin du cours 7`

  Puisque
$$A\longmapsto \nu(A) = \int_A cu(x)\,\mu(dx)$$
  est une mesure sur $(E,\mathscr{A})$, on a
$$\int_E cu(x)\,\mu(dx) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n\right) = \sup_{n\in\mathbf{N}}\nu(E_n) = \sup_{n\in\mathbf{N}}\int_{E_n} cu(x)\,\mu(dx).$$

  Or, par définition de E_n et par croissance de l'intégrale,
$$\int_{E_n} cu(x)\,\mu(dx) = \int_E cu(x)\mathbf{1}_{E_n}(x)\,\mu(dx) \leq \int_E f_n(x)\mathbf{1}_{E_n}(x)\,\mu(dx) \leq \int_E f_n(x)\,\mu(dx).$$

  Par conséquent,
$$c\int_E u(x)\,\mu(dx) = \int_E cu(x)\,\mu(dx) = \sup_{n\in\mathbf{N}}\int_{E_n} cu(x)\,\mu(dx) \leq \sup_{n\in\mathbf{N}}\int_E f_n(x)\,\mu(dx).$$

  Le résultat étant vrai pour tout $0<c<1$, on obtient finalement
$$\int_E u(x)\,\mu(dx) \leq \sup_{n\in\mathbf{N}}\int_E f_n(x)\,\mu(dx).$$

□

Corollaire. *Soient $f \in \mathscr{M}_+$, $g \in \mathscr{M}_+$ et $\alpha \in \mathbf{R}_+$. Alors*

$$\int_E (\alpha f)(x)\,\mu(dx) = \alpha \int_E f(x)\,\mu(dx), \qquad \int_E (f+g)(x)\,\mu(dx) = \int_E f(x)\,\mu(dx) + \int_E g(x)\,\mu(dx).$$

Démonstration. Soient $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{E}_+$ et $(g_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{E}_+$ des suites croissantes qui convergent respectivement vers f et g. La suite $(\alpha f_n + g_n)_{n\geq 0}$ converge en croissant vers $\alpha f + g$.
Par conséquent, d'après le théorème précédent et la linéarité de l'intégrale sur $\mathscr{E}_+$,

$$\begin{aligned}\int_E (\alpha f + g)(x)\,\mu(dx) &= \lim_{n\to+\infty} \int_E (\alpha f_n + g_n)(x)\,\mu(dx) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\alpha \int_E f_n(x)\,\mu(dx) + \int_E g_n(x)\,\mu(dx)\right) = \alpha \int_E f(x)\,\mu(dx) + \int_E g(x)\,\mu(dx).\end{aligned}$$

□

Corollaire. *Soit $(u_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{M}_+$. Alors,*

$$\int_E \left(\textstyle\sum_{n\geq 0} u_n\right)(x)\,\mu(dx) = \sum_{n\geq 0} \int_E u_n(x)\,\mu(dx).$$

Démonstration. Théorème de convergence monotone à la suite croissante $f_n = \sum_{1\leq k\leq n} u_k$. □

Définition. Soient $f \in \mathscr{M}_+$ et $A \in \mathscr{A}$. On pose

$$\int_A f(x)\,\mu(dx) := \int_E \mathbf{1}_A(x) f(x)\,\mu(dx).$$

Corollaire. *Soit $f \in \mathscr{M}_+$. L'application de $\mathscr{A}$ dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ définie par*

$$\nu(A) = \int_A f(x)\,\mu(dx), \quad A \in \mathscr{A},$$

est une mesure positive sur $(E, \mathscr{A})$.

- La mesure ν est appelée mesure de densité f par rapport à ν.
- Elle vérifie $\nu(A) = 0$ dès que $\mu(A) = 0$. En effet,

$$\nu(A) = \int_E \mathbf{1}_A(x) f(x)\,\mu(dx) \leq \int_E \mathbf{1}_A(x)(+\infty)\,\mu(dx) \leq +\infty\,\mu(A).$$

Démonstration. On a bien sûr $\nu(\emptyset) = 0$. Si $(A_n)_{n\geq 0}$ sont des parties de $\mathscr{A}$ deux à deux disjointes, on a $\mathbf{1}_{\cup A_n} = \sum \mathbf{1}_{A_n}$ et

$$\nu\left(\textstyle\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \int_E \sum_{n\geq 0} f(x)\mathbf{1}_{A_n}(x)\,\mu(dx) = \sum_{n\geq 0} \int_E f(x)\mathbf{1}_{A_n}(x)\,\mu(dx) = \sum_{n\geq 0} \nu(A_n).$$

□

- On rappelle que si $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{M}_+$, la fonction $\liminf f_n$ définie par

$$\left(\liminf f_n\right)(x) = \liminf f_n(x) = \sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} f_k(x), \quad x \in E,$$

  est mesurable.

Corollaire (Lemme de Fatou)**.** *Soit* $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{M}_+$. *Alors*

$$\int_E \left(\liminf f_n\right)(x)\,\mu(dx) \leq \liminf \int_E f_n(x)\,\mu(dx).$$

Démonstration. Rappelons que $\liminf f_n = \sup_{n\geq} g_n$ avec $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. La suite $(g_n)_{n\geq 0}$ étant croissante, on a, par convergence monotone

$$\int_E \left(\liminf f_n\right)(x)\,\mu(dx) = \int_E \left(\sup_{n\geq 0} g_n\right)(x)\,\mu(dx) = \sup_{n\geq 0} \int_E g_n(x)\,\mu(dx).$$

De plus, pour tout entier n, $g_n \inf_{k\geq n} f_k \leq f_k$ pour tout $k \geq n$, et par croissance de l'intégrale,

$$\forall\, k \geq n, \quad \int_E g_n(x)\,\mu(dx) \leq \int_E f_k(x)\,\mu(dx), \qquad \int_E g_n(x)\,\mu(dx) \leq \inf_{k\geq n} \int_E f_k(x)\,\mu(dx).$$

Par conséquent,

$$\int_E \left(\liminf f_n\right)(x)\,\mu(dx) = \sup_{n\geq 0} \int_E g_n(x)\,\mu(dx) \leq \sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} \int_E f_k(x)\,\mu(dx) = \liminf \int_E f_n(x)\,\mu(dx).$$

$\square$

Exercice. Soit $f \in \mathscr{M}_+$. En considérant, $f_n(x) = n\,f(x)$, montrer

$$\int_E (+\infty f)(x)\,\mu(dx) = +\infty \int_E f(x)\,\mu(dx) = \begin{cases} 0, & \text{si } \int_E f(x)\,\mu(dx) = 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

En explicitant $\int_E (+\infty f)(x)\,\mu(dx)$ en déduire que

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu\left(\{x \in E : f(x) = 0\}\right) = 0.$$

Exemple(s). • Soient $f \in \mathscr{M}_+$ et $x_0 \in E$. Montrer que

$$\int_E f(x)\,\delta_{x_0}(dx) = f(x_0).$$

• Si μ est discrète, $\mu = \sum_{n\geq 0} p_n\,\delta_{x_n}$, montrer que, pour $f \in \mathscr{M}_+$,

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \sum_{n\geq 0} p_n\,f(x_n).$$

• Soit $\gamma = \sum_{k\geq 0} \delta_k$ la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$. Que vaut $\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mu(dx)$? Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} \frac{n}{k^2+n} = +\infty.$$

Lemme (Inégalité de Markov)**.** *Soient* $f \in \mathscr{M}_+$ *et* $a > 0$. *Alors,*

$$\mu\left(\{x \in E : f(x) \geq a\}\right) \leq a^{-1} \int_E f(x)\,\mu(dx).$$

Définition. Soit $P(x)$ une propriété dépendant de $x \in E$. On dit que $P(x)$ est vraie μ-presque partout s'il existe $N \in \mathscr{F}$ tel que, $\mu(N) = 0$ et, pour tout $x \in N^c$, $P(x)$ est vraie.

- $\mu(\{x \in E : P(x) \text{ est fausse}\}) = 0$ lorsque $\{x \in E : P(x) \text{ est fausse}\} \in \mathscr{A}$.
- Si f est mesurable, $f = 0$ μ-p.p. si $\mu\big(\{x \in E : |f(x)| > 0\}\big) = 0$.
  - Par exemple, $f = \mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$ est nulle presque partout pour la mesure de Lebesgue.

`2017/2018 : fin du cours 8`

Proposition. *Soient f et g deux éléments de $\mathscr{M}_+$. Alors*

1. $\displaystyle\int_E f(x)\,\mu(dx) = 0$ *si et seulement si $f = 0$ μ-p.p. ;*
2. *Si $f \le g$ μ-p.p., alors* $\displaystyle\int_E f(x)\,\mu(dx) \le \int_E g(x)\,\mu(dx)$ *; en particulier, si $f = g$ μ-p.p., on a* $\displaystyle\int_E f(x)\,\mu(dx) = \int_E g(x)\,\mu(dx)$ *;*
3. *Si* $\displaystyle\int_E f(x)\,\mu(dx) < +\infty$ *alors* $\mu\big(\{x \in E : f(x) = +\infty\}\big) = 0$ *(f est finie μ-p.p.).*

Démonstration. 1. Si $\displaystyle\int_E f(x)\,\mu(dx) = 0$, alors, d'après l'inégalité de Markov, pour tout $n \ge 1$,

$$\mu\left(\left\{x \in E : f(x) \ge n^{-1}\right\}\right) \le n\int_E f(x)\,\mu(dx) = 0.$$

Par conséquent,

$$\mu\big(\{x \in E : f(x) > 0\}\big) \le \sum_{n\ge 1} \mu\left(\left\{x \in E : f(x) \ge n^{-1}\right\}\right) = 0.$$

Réciproquement, si $\mu\big(\{x \in E : f(x) > 0\}\big) = 0$, puisque $\min(n, f)$ converge en croissant vers f,

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,\mu(dx), \quad \text{et,}$$

$$\int_E f_n(x)\,\mu(dx) = \int_E f_n(x)\mathbf{1}_{\{x\in E: f(x)>0\}}\,\mu(dx) \le n\,\mu\big(\{x \in E : f(x) > 0\}\big) = 0.$$

2. Soit $N = \{x \in E : f(x) > g(x)\}$. Puisque $f\mathbf{1}_N = g\mathbf{1}_N = 0$ $\mu - p.p.$, on

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \int_E f(x)\mathbf{1}_{N^c}(x)\,\mu(dx) \le \int_E g(x)\mathbf{1}_{N^c}(x)\,\mu(dx) = \int_E g(x)\,\mu(dx).$$

3. Pour tout $n \ge 1$, d'après l'inégalité de Markov,

$$\mu\big(\{x \in E : f(x) = +\infty\}\big) \le \mu\big(\{x \in E : f(x) \ge n\}\big) \le n^{-1}\int_E f(x)\,\mu(dx).$$

$\square$

2. Intégrale de fonctions mesurables.

- $(E, \mathscr{A}, \mu)$ espace mesuré.

Définition. Soit f une fonction de E dans $\overline{\mathbf{R}}$. On dit que f et intégrable par rapport à μ si f est mesurable et si

$$\int_E |f(x)|\,\mu(dx) < +\infty.$$

- Si f est μ-intégrable, alors f est finie μ-p.p.
- On rappelle que $f^+ = \max(f,0)$, $f^- = \max(-f,0)$: $|f| = f^+ + f^-$, $f = f^+ - f^-$.
- f est μ-intégrable si et seulement si f^+ et f^- le sont.

Définition. Soit f de E dans $\overline{\mathbf{R}}$ une fonction intégrable. On appelle intégrale de f sur E par rapport à μ le réel

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \int_E f^+(x)\,\mu(dx) - \int_E f^-(x)\,\mu(dx).$$

- On note $\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}(\mu)$ l'ensemble des fonctions réelles intégrables par rapport à μ.

Proposition. *$\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Si f et g sont éléments de $\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}(\mu)$ et α un réel,*

$$\int_E (\alpha f + g)(x)\,\mu(dx) = \alpha \int_E f(x)\,\mu(dx) + \int_E g(x)\,\mu(dx), \qquad \left|\int_E f(x)\,\mu(dx)\right| \leq \int_E |f|(x)\,\mu(dx).$$

Démonstration. • $\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ puisque

$$\int_E |\alpha f + g|(x)\,\mu(dx) \leq |\alpha| \int_E |f|\,\mu(dx) + \int_E |g|(x)\,\mu(dx).$$

- Si $\alpha \geq 0$, $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. Si $\alpha \leq 0$, $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$, $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$. Par conséquent,

$$\int_E (\alpha f)(x)\,\mu(dx) = \alpha \int_E f(x)\,\mu(dx).$$

- Soient f et g éléments de $\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}(\mu)$. On a d'une part $f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ et d'autre part $(f+g)^+ - (f+g)^-$. Par conséquent, $(f+g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f+g)^-$ et, par linéarité de l'intégrale sur $\mathscr{M}_+$,

$$\begin{aligned}\int_E (f+g)^+(x)\,\mu(dx) &+ \int_E f^-(x)\,\mu(dx) + \int_E g^-(x)\,\mu(dx)\\ &= \int_E f^+(x)\,\mu(dx) + \int_E g^+(x)\,\mu(dx) + \int_E (f+g)^-(x)\,\mu(dx),\end{aligned}$$

égalité qui se réécrit (tous les termes étant des réels)

$$\begin{aligned}\int_E (f+g)(x)\,\mu(dx) &= \int_E (f+g)^+(x)\,\mu(dx) - \int_E (f+g)^-(x)\,\mu(dx)\\ &= \int_E f^+(x)\,\mu(dx) - \int_E f^-(x)\,\mu(dx) + \int_E g^+(x)\,\mu(dx) - \int_E g^-(x)\,\mu(dx)\\ &= \int_E f(x)\,\mu(dx) + \int_E g(x)\,\mu(dx).\end{aligned}$$

- Finalement, par linéarité de l'intégrale sur $\mathscr{M}_+$,

$$\left|\int_E f(x)\,\mu(dx)\right| = \left|\int_E f^+(x)\,\mu(dx) - \int_E f^-(x)\,\mu(dx)\right|$$
$$\le \int_E f^+(x)\,\mu(dx) + \int_E f^-(x)\,\mu(dx) = \int_E |f(x)|\,\mu(dx).$$

□

- Par construction, si $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}(\mu)$ est positive, alors $f^- \equiv 0$ et

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \int_E f^+(x)\,\mu(dx) \ge 0.$$

- Si f et g sont dans $\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}(\mu)$ et $f = g$ μ-p.p. alors $|f-g| = 0$ μ-p.p. et

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \int_E g(x)\,\mu(dx)$$

  puisque
$$0 \le \left|\int_E f(x)\,\mu(dx) - \int_E g(x)\,\mu(dx)\right| \le \int_E |f-g|(x)\,\mu(dx) = 0.$$

- En particulier, si f et g sont dans $\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}(\mu)$ et $f \le g$ μ-p.p. alors

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \int_E f(x)\mathbf{1}_{\{f\le g\}}(x)\,\mu(dx) \le \int_E g(x)\mathbf{1}_{\{f\le g\}}(x)\,\mu(dx) = \int_E g(x)\,\mu(dx).$$

Définition. Soit f une fonction de E dans $\mathbf{C}$. On dit que f est μ-intégrable si f est mesurable et
$$\int_E |f|(x)\,\mu(dx) < +\infty.$$

$L^1_{\mathbf{C}}(\mu)$ désigne l'ensemble des fonctions complexes μ-intégrables.

- f est intégrable si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Définition. Soit $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\mu)$. On appelle intégrale de f sur E par rapport à μ le nombre complexe

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) := \int_E \mathrm{Re}(f)(x)\,\mu(dx) + i\int_E \mathrm{Im}(f)(x)\,\mu(dx).$$

- Par construction

$$\mathrm{Re}\left(\int_E f(x)\,\mu(dx)\right) = \int_E \mathrm{Re}(f)(x)\,\mu(dx), \quad \mathrm{Im}\left(\int_E f(x)\,\mu(dx)\right) = \int_E \mathrm{Im}(f)(x)\,\mu(dx).$$

Proposition. *$\mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. Si f et g sont éléments de $\mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}(\mu)$ et $\alpha \in \mathbf{C}$,*

$$\int_E (\alpha f + g)(x)\,\mu(dx) = \alpha\int_E f(x)\,\mu(dx) + \int_E g(x)\,\mu(dx), \qquad \left|\int_E f(x)\,\mu(dx)\right| \le \int_E |f|(x)\,\mu(dx).$$

Démonstration. La première partie se montre comme dans le cas réel. Montrons la dernière assertion (évidente dans le cas l'intégrale de f est nulle). Soit α un complexe tel que $|\alpha| = 1$ et

$$\left|\int_E f(x)\,\mu(dx)\right| = \alpha \int_E f(x)\,\mu(dx).$$

Par linéarité,

$$\left|\int_E f(x)\,\mu(dx)\right| = \int_E (\alpha f)(x)\,\mu(dx) = \int_E \mathrm{Re}(\alpha f)(x)\,\mu(dx) + i \int_E \mathrm{Im}(\alpha f)(x)\,\mu(dx),$$

et comme le membre de gauche est réel, la partie imaginaire du membre de droite est nulle, et on a

$$\left|\int_E f(x)\,\mu(dx)\right| = \int_E \mathrm{Re}(\alpha f)(x)\,\mu(dx) \le \int_E |\alpha f|(x)\,\mu(dx) = \int_E |f|(x)\,\mu(dx).$$

□

- On montre encore que si deux éléments f et g de $\mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}(\mu)$ sont égaux presque partout alors

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \int_E g(x)\,\mu(dx).$$

- Soient $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}(\mu)$ et $A \in \mathscr{A}$; on pose

$$\int_A f(x)\,\mu(dx) := \int_E f(x)\mathbf{1}_A(x)\,\mu(dx).$$

Exercice. 1. Soient $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}(\mu)$ et g une fonction de E dans $\mathbf{C}$ mesurable et bornée. Montrer que $fg \in \mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}(\mu)$.

2. Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}(\mu)$ telle que, pour tout $A \in \mathscr{A}$,

$$\int_A f(x)\,\mu(dx) = 0.$$

Montrer que f est nulle μ-presque partout.

3. Exemples importants.

3.1. Intégrale de Lebesgue et Intégrale de Riemann.

- Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction **bornée**.
- On veut comparer l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue de f sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_{[a,b]} f(x)\,\lambda(dx)$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

- Soit $\sigma : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ une subdivision de $[a,b]$.

- $|\sigma| = \max_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1})$ le pas de la subdivision
- $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

- Les sommes de Darboux sont

$$s(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}), \qquad S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1})$$

Définition. La fonction f bornée sur $[a,b]$ est Riemann intégrale s'il existe un réel I tel que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|\sigma| \le \eta \quad \Longrightarrow \quad |s(\sigma) - I| \le \varepsilon,\ |S(\sigma) - I| \le \varepsilon.$$

- Si f est Riemann intégrable sur $[a,b]$, pour tout $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$,

$$\sum_{1\le k\le n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) \longrightarrow I = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{si } |\sigma| \to 0.$$

- $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbf{Q}}(x)$ n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$: $s(\sigma) = 0$ et $S(\sigma) = 1$.

- Par contre, $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$ est intégrable au sens de Lebesgue et

$$\int_{[0,1]} \mathbf{1}_{\mathbf{Q}}(x)\,\lambda(dx) = \lambda(\mathbf{Q} \cap [0,1]) = 0.$$

Proposition. *Soit f une fonction Riemann intégrable sur le segment $[a,b]$. Alors f est Lebesgue intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\lambda(dx) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

- En particulier, si f est continue, continue par morceaux ...

- Intégration par parties, Primitives usuelles

Démonstration. On fait la preuve dans le cas où f est borélienne et Riemann intégrable sur $[a,b]$. On suppose que f est positive. On a (cf. somme de Darboux)

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \sup\left\{\int_a^b g(x)\,dx : g \le f,\ g \text{ en escalier}\right\},\\
&= \sup\left\{\int_{[a,b]} g(x)\,\lambda(dx) : g \le f,\ g \text{ en escalier}\right\},\\
&\le \int_{[a,b]} f(x)\,\lambda(dx) = \sup\left\{\int_{[a,b]} g(x)\,\lambda(dx) : g \le f,\ g \in \mathscr{E}_+\right\},\\
&\le \inf\left\{\int_{[a,b]} h(x)\,\lambda(dx) : h \ge f,\ h \text{ en escalier}\right\},\\
&= \inf\left\{\int_a^b h(x)\,dx : h \ge f,\ h \text{ en escalier}\right\} = \int_a^b f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Si f n'est pas positive, on sépare f^+ et f^- et on utilise la linéarité. □

Théorème (Lebesgue)**.** *Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. On note $D(f)$ l'ensemble des points de discontinuité de f.*

Alors f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ si te seulement si f est bornée sur $[a,b]$ et l'ensemble $D(f)$ négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Proposition. *Soient I un intervalle non compact de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction localement Riemann intégrable. Alors f est Lebesgue intégrable sur I si et seulement si $|f|$ est Riemann intégrable sur I et dans ce cas*

$$\int_I f(x)\,\lambda(dx) = \int_I f(x)\,dx.$$

- Attention, il existe des fonctions semi-Riemann intégrable : f est RI mais $|f|$ n'est pas RI.
- Ces fonctions ne sont pas intégrables au sens de Lebesgue !
  - Par exemple $f(x) = \sin x/x$ sur $[\pi, +\infty[$

3.2. Mesures discrètes.

- Soient $(p_n)_{n\geq 0} \subset \overline{\mathbf{R}}_+$ et $(x_n)_{n\geq 0} \subset E$
- On considère la mesure positive

$$\mu = \sum_{n\geq 0} p_n \delta_{x_n}, \qquad \mu(A) = \sum_{n\geq 0} p_n \mathbf{1}_A(x_n), \quad A \in \mathscr{A}.$$

- Si $f \in \mathscr{M}_+$,

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \sum_{n\geq 0} p_n f(x_n). \tag{1}$$

  - (1) est vraie si $f = \mathbf{1}_A$: c'est la définition
  - Par linéarité de l'intégrale, (1) est vraie si $f \in \mathscr{E}_+$
  - Par convergence monotone, (1) est vraie si $f \in \mathscr{M}_+$

Théorème. *Soit f une fonction mesurable de E dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$.*
La fonction f est intégrable par rapport à μ si et seulement si

$$\sum_{n\geq 0} p_n |f(x_n)| < +\infty,$$

et dans ce cas

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \sum_{n\geq 0} p_n f(x_n).$$

Démonstration. Si f est réelle, $f = f^+ - f^-$; si f est complexe, $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$. □

Exemple(s). Pour tout réel s, $x \longmapsto s^x$ est intégrable par rapport à la mesure de Poisson.

2017/2018 : fin du cours 9

3.3. Mesures à densité.

- Si $f \in \mathscr{M}_+$, $A \longmapsto \nu(A) = \int_A f(x)\,\mu(dx)$ est une mesure
  - Mesure de densité f par rapport à μ.

Théorème. *Soient $f \in \mathscr{M}_+$ et ν la mesure de densité f par rapport à μ.*

1. *Si $g \in \mathscr{M}_+$,*
$$\int_E g(x)\,\nu(dx) = \int_E g(x) f(x)\,\mu(dx). \tag{2}$$
2. *Une fonction mesurable, g, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$ est intégrable par rapport à ν si et seulement si*
$$\int_E |g(x)| f(x)\,\mu(dx) < +\infty.$$
Dans ce cas, (2) *est vraie.*

Démonstration. Par définition de ν, (2) est vraie si $g = \mathbf{1}_A$. Par linéarité, cette formule est vraie pour $g \in \mathscr{E}_+$, puis, par convergence monotone, elle est vraie pour toute $g \in \mathscr{M}_+$.
Ceci donne le critère d'intégrabilité ; $g = g^+ - g^-$ puis $g = \mathrm{Re}(g) + i\mathrm{Im}(g)$ pour finir. □

Exemple(s). La fonction $x \longmapsto \sin x/x$ n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}$ par rapport à la mesure de Lebesgue mais est intégrable par rapport à la mesure de densité $1/(1+|x|)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

3.4. Mesures image.

- Soit u une application mesurable de $(E, \mathscr{A}, \mu)$ dans $(F, \mathscr{B})$.
- Pour $B \in \mathscr{B}$ (ou $B \in u_*(\mathscr{A})$), $u_*(\mu)(B) = \mu\big(u^{-1}(B)\big)$
  - Mesure image de μ par u.

Théorème. *Soient μ une mesure positive sur $(E, \mathscr{A})$ et u une application mesurable de $(E, \mathscr{A})$ dans $(F, \mathscr{B})$. On note $u_*(\mu)$ la mesure image μ par u sur $\mathscr{B}$.*

1. *Si $f \in \mathscr{M}_+$, alors*
$$\int_F f(y)\,u_*(\mu)(dy) = \int_E f(u(x))\,\mu(dx). \tag{3}$$
2. *Soit f une fonction mesurable de F dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$. La fonction f est intégrable par rapport à $u_*(\mu)$ si et seulement si $f \circ u$ est intégrable par rapport à μ. Dans ce cas, la formule* (3) *est vraie.*

Démonstration. Par définition de $u_*(\mu)$, (3) est vraie pour les indicatrices, linéarité fonctions étagées, croissance monotone fonctions mesurables positives, $f = f^+ - f^-$, etc. □

Exemple(s). Soit $u(x) = [x]$. Une fonction borélienne est intégrable par rapport à $u_*(\lambda)$ ssi
$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |f(n)| < +\infty.$$
En fait, $u_*(\lambda) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n$.