Exercices à faire pour le chapitre « Intégrale de Lebesgue »

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$. En utilisant le suite $f_n(x) = nf(x)$, montrer que

$$\int_E (+\infty f)(x)\,\mu(dx) = +\infty \int_E f(x)\,\mu(dx).$$

en explicitant chacun des deux termes ci-dessus, en déduire que

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu\left(\{x \in E : f(x) > 0\}\right) = 0.$$

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \sum_{n\geqslant 0} \int_E f(x)\mathbf{1}_{\{n\leqslant f<n+1\}}(x)\,\mu(dx).$$

En déduire que

$$\sum_{n\geqslant 0} n\mu\left(\{x \in E : n \leqslant f(x) < n+1\}\right) \leqslant \int_E f(x)\,\mu(dx) \leqslant \sum_{n\geqslant 0}(n+1)\mu\left(\{x \in E : n \leqslant f(x) < n+1\}\right),$$

puis que

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geqslant 1} \mu\left(\{x \in E : f(x) \geqslant n\}\right) < +\infty,$$

et que, lorsque μ est finie,

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n\geqslant 0} \mu\left(\{x \in E : f(x) \geqslant n\}\right) < +\infty.$$

Exercice 3. 1. Soit f la fonction définie sur $[\pi, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Montrer que l'intégrale de Riemann généralisée $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} f(x)\,dx$ converge mais que f n'est pas Lebesgue intégrable sur $[\pi, +\infty[$.

2. Soient $T > 0$ et u une fonction continue et T-périodique. Montrer que $f(x) = u(x)/x$ est Lebesgue intégrable sur $[T, +\infty[$ si et seulement si u est nulle.

Exercice 4. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geqslant 0} \frac{2n + \sqrt{n}\sin n}{k^2 + nk + 1} = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{nx+1}\,dx = +\infty.$$

Exercice 5. Soit $\alpha > 0$. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ la fonction $x \longmapsto e^{zx}$ est-elle intégrable par rapport à la mesure $\mu = \sum_{n\geqslant 0} \alpha^n\,\delta_n$? Calculer dans ce cas $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{zx}\,\mu(dx)$.