Correction des exercices pour le chapitre « Intégrale de Lebesgue »

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Notons, pour $n \geqslant 1$, $f_n(x) = n\, f(x)$ et $S = \{x \in E : f(x) > 0\}$.

Comme f est positive, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge en croissant vers $+\infty\, f(x) = +\infty\, \mathbf{1}_S(x)$. Par convergence monotone,

$$\int_E (+\infty f)(x)\, \mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_E (nf)(x)\, \mu(dx) = \lim_{n\to\infty} n \int_E f(x)\, \mu(dx) = +\infty \int_E f(x)\, \mu(dx).$$

D'après le résultat précédent,

$$\int_E (+\infty f)(x)\, \mu(dx) = \int_E +\infty\, \mathbf{1}_S(x)\, \mu(dx) = +\infty \int_E \mathbf{1}_S(x)\, \mu(dx) = +\infty \mu(S).$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} +\infty, & \text{si } \mu(S) > 0, \\ 0, & \text{si } \mu(S) = 0 \end{cases} = +\infty\mu(S) = +\infty \int_E f(x)\, \mu(dx) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \int_E f(x)\, \mu(dx) > 0, \\ 0, & \text{si } \int_E f(x)\, \mu(dx) = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, $\mu(S) = 0$ si et seulement si $\int_E f(x)\, \mu(dx) = 0$.

Exercice 2. cf. correction DM 1.

Exercice 3. 1. La fonction f est continue sur $[\pi, +\infty[$ donc localement RI sur cet intervalle. Pour $t > \pi$, par IPP,

$$\int_\pi^t \frac{\sin x}{x}\, dx = \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_\pi^t - \int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

De manière évidente,

$$\lim_{t\to\infty} \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_\pi^t = -\frac{1}{\pi}.$$

D'autre part, d'après le critère de Riemann ($2 > 1$), $\cos x/x^2$ est RI sur $[\pi, +\infty[$ et le second terme du membre de droite converge dans $\mathbb{R}$ quand $t \to +\infty$.

Par conséquent, $t \longmapsto \displaystyle\int_\pi^t \frac{\sin x}{x}\, dx$ admet une limite finie quand $t \to +\infty$: f est RI sur $[\pi, +\infty[$.

Le fait que f ne soit pas Lebesgue intégrable sur $[\pi, +\infty[$ résulte de la question 2.

2. Soient $T > 0$ et u une fonction continue et T-périodique. La fonction f est borélienne puisque continue sur $[T, +\infty[$. On a, par convergence monotone,

$$\int_{[T,+\infty[} |f(x)|\, \lambda(dx) = \sum_{k\geqslant 1} \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|u(x)|}{x}\, dx.$$

Comme u est T-périodique, pour tout $k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T} |u(x)|\, dx = \int_0^T |u(x)|\, dx$ et

$$\frac{1}{(k+1)T} \int_0^T |u(x)|\, dx \leqslant \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|u(x)|}{x}\, dx \leqslant \frac{1}{kT} \int_0^T |u(x)|\, dx.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{T} \int_0^T |u(x)|\, dx \sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k} \leqslant \int_{[T,+\infty[} |f(x|\, \lambda(dx) \leqslant \frac{1}{T} \int_0^T |u(x)|\, dx \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}.$$

Comme la série de terme général $1/k$ diverge, on en déduit que f est Lebesgue-intégrable sur $[T, +\infty[$ si et seulement si $\displaystyle\int_0^T |u(x)|\, dx = 0$ c'est à dire, comme $|u|$ est continue et positive, si et seulement si u est nulle sur $[0, T]$. Cette dernière affirmation est équivalente à dire que u est nulle sur $\mathbb{R}$ puisque u est T-périodique.

Exercice 4. Notons γ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$: $\gamma = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$. On a

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{2n+\sqrt{n}\sin n}{k^2+nk+1} = \int_{\mathbb{N}} f_n(x)\,\gamma(dx), \qquad \text{avec } f_n(k) = \frac{2n+\sqrt{n}\sin n}{k^2+nk+1}.$$

Remarquons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\sin(n)/\sqrt{n}}{k+(k^2+1)/n} = \frac{2}{k} \quad (+\infty \text{ si } k=0).$$

Le lemme de Fatou donne alors

$$+\infty = \sum_{k\geqslant 0} \frac{2}{k} = \int_{\mathbb{N}} \liminf f_n(x)\,\mu(dx) = \int_{\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mu(dx) \leqslant \liminf \int_{\mathbb{N}} f_n(x)\,\gamma(dx).$$

Notons, pour $0 < x < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \dfrac{ne^x}{nx+1} = \dfrac{e^x}{x+1/n} \geqslant 0$. On a, pour tout $0 < x < 1$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x/x$. D'après le lemme de Fatou et le critère de Riemann en 0,

$$+\infty = \int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx = \int_0^1 \liminf f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \leqslant \liminf \int_0^1 \frac{ne^x}{nx+1}\,dx.$$

On peut aussi utiliser le théorème de convergence monotone sur ce dernier exemple.

Exercice 5. Soit $z \in \mathbb{C}$. La fonction $x \longmapsto e^{zx}$ est intégrable par rapport à la mesure $\mu = \sum_{n\geqslant 0} \alpha^n\,\delta_n$ si et seulement si, comme $|e^{zn}| = e^{\mathrm{Re(z)}n}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{zx}|\,\mu(dx) = \sum_{n\geqslant 0} |e^{zn}|\alpha^n = \sum_{n\geqslant 0} e^{\mathrm{Re(z)}n}\alpha^n = \sum_{n\geqslant 0} \left(\alpha e^{\mathrm{Re(z)}}\right)^n < +\infty.$$

La fonction $x \longmapsto e^{zx}$ est donc μ-intégrable si et seulement si $\alpha e^{\mathrm{Re}(z)} < 1$ c'est à dire si et seulement si $\mathrm{Re}(z) < -\ln\alpha$. Dans ce cas,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{zx}\,\mu(dx) = \sum_{n\geqslant 0} e^{zn}\alpha^n = \sum_{n\geqslant 0} (\alpha e^z)^n = \frac{1}{1-\alpha e^z}.$$