Mesures produit, Changement de variables

1. Mesures produit.

1.1. Construction.

- Soient $(E,\mathscr{A},\mu)$ et $(F,\mathscr{B},\nu)$ deux espaces mesurés
  - On suppose que μ et ν sont σ-finies
  - Il existe une suite croissante d'ensembles $(\mathscr{E}_n)_{n\geq 0}\subset\mathscr{A}$ telle que

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n = E, \qquad \forall n\in\mathbf{N}, \quad \mu(E_n)<+\infty.$$

- On veut construire une mesure m sur l'espace produit $(E\times F,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$
  - $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ est la tribu engendrée sur $E\times F$ par les rectangles (pavés) mesurables i.e

$$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}=\sigma(A\times B : A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B})$$

  - m « se comporte comme le produit » de μ et ν : on souhaite que

$$(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$$

- Rappelons que, pour tout $x\in E$, $y\longmapsto(x,y)$, notée S_x, est mesurable par rapport à $\mathscr{B}$ et $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$. En effet, si $A\times B$ est un pavé mesurable,

$$S_x^{-1}(A\times B)=\{y\in F : (x,y)\in A\times B\}=\begin{cases} B, & \text{si } x\in A,\\ \emptyset, & \text{sinon.}\end{cases}$$

  - Déssiner $C_x=S_x^{-1}(C)$ et $C^y=S_y^{-1}(C)$ pour un ensemble qui n'est pas un pavé.

- Par conséquent, si $f : E\times F\longrightarrow\overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$ est mesurable alors, pour tout $x\in E$, $y\longmapsto f(x,y)$ est mesurable. Pour x fixé dans $\mathscr{E}$

$$f(x,y)=f\circ S_x(y)$$

Lemme. *Soit $f : E\times F\longrightarrow\overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction mesurable. Alors, les applications*

$$x\longmapsto\int_F f(x,y)\,\nu(dy), \qquad y\longmapsto\int_E f(x,y)\,\mu(dx)$$

sont mesurables respectivement par rapport à $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$

- Le résultat repose sur un argument de « classe monotone »

- Remarquons que si $f = \mathbf{1}_C$ avec $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$,

$$\int_F f(x,y)\,\nu(dy) = \nu(C_x), \quad C_x = \{y \in F : (x,y) \in C\}.$$

  - En particulier, si $C = A \times B$,

$$\int_F f(x,y)\,\nu(dy) = \nu(C_x) = \mathbf{1}_A(x)\nu(B), \qquad \int_E f(x,y)\,\mu(dx) = \mathbf{1}_B(y)\mu(A)$$

  - On remarque que, dans ce cas,

$$\int_E \left(\int_F f(x,y)\,\nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_F \left(\int_E f(x,y)\,\mu(dx) \right) \nu(dy) = \mu(A)\,\nu(B)$$

Théorème (Mesure produit)**.** *Soient $(E,\mathscr{A},\mu)$ et $(F,\mathscr{B},\nu)$ deux espaces mesurés. On suppose que μ et ν sont σ**-finies**.*
Il exite une unique mesure m sur $(E \times F, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ telle que

$$\forall A \in \mathscr{A}, \quad \forall B \in \mathscr{B}, \qquad m(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

La mesure m est notée $\mu \otimes \nu$ et est appelée mesure produit de μ et ν.
De plus, pour tout $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$,

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_E \nu(C_x)\,\mu(dx) = \int_F \mu\left(C^y\right)\,\nu(dy).$$

Exemple(s). Soient $f : E \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction mesurable et

$$C = \left\{(x,y) \in E \times \overline{\mathbf{R}}_+ : 0 \le y \le f(x)\right\}.$$

On a,

$$(\mu \otimes \lambda)(C) = \int_E \lambda(C_x)\,\mu(dx) = \int_E f(x)\,\mu(dx),$$
$$(\mu \otimes \lambda)(C) = \int_{[0,+\infty[} \mu\left(C^y\right)\,\lambda(dy) = \int_{[0,+\infty[} \mu\left(\{x \in E : f(x) \ge y\}\right)\lambda(dy).$$

- Plus généralement,

Théorème. *Soient $(E_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$, $1 \le i \le n$, des espaces mesurés σ-finis. Il existe une unique mesure sur $(E_1 \times \ldots \times E_n, \mathscr{A}_1 \otimes \ldots \times \mathscr{A}_n)$, notée $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$, telle que :*

$$\forall A_1 \in \mathscr{A}_1, \ldots, \forall A_n \in \mathscr{A}_n, \qquad (\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n)(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \ldots \mu_n(A_n).$$

De plus, pour $1 \le k \le n$, $(\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_k) \otimes (\mu_{k+1} \otimes \ldots \otimes \mu_n) = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$.

- Par exemple, $\lambda_p \otimes \lambda_q = \lambda_{p+q}$.

1.2. Intégrales multiples.

- Dans tout ce paragraphe, $(E,\mathscr{A},\mu)$ et $(F,\mathscr{B},\nu)$ sont deux espaces mesurés σ-finis
- On étudie $\displaystyle\int_{E\times F} f(x,y)\,(\mu\otimes\nu)(dx,dy)$.

Théorème (Tonelli)**.** *Soient $(E,\mathscr{A},\mu)$ et $(F,\mathscr{B},\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et $f : E\times F \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ une application $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$-mesurable. Alors,*

$$\int_{E\times F} f(x,y)\,(\mu\otimes\nu)(dx,dy) = \int_E\left(\int_F f(x,y)\,\nu(dy)\right)\mu(dx) = \int_F\left(\int_E f(x,y)\,\mu(dx)\right)\nu(dy).$$

Démonstration. • Pour $f = \mathbf{1}_C$, c'est la définition de $\mu\otimes\nu$.

- Par linéarité, la formule est vraie pour f étagée.
- Par convergence monotone, elle est vraie si $f\in\mathscr{M}_+$.

□

- On note souvent $\mu(dx)\nu(dy)$ au lieu de $(\mu\otimes\nu)(dx,dy)$ i.e.

$$\int_{E\times F} f(x,y)\,\mu(dx)\nu(dy) \quad \text{au lieu de} \quad \int_{E\times F} f(x,y)\,(\mu\otimes\nu)(dx,dy).$$

Exemple(s). On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^2$ par

$$f(x,y) = y\exp\left(-y^2(1+x^2)/2\right).$$

En utilisant le théorème de Tonelli, montrer que

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Corollaire. *Une application f de $E\times F$ à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$, mesurable par rapport à $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$, est intégrable par rapport à $\mu\otimes\nu$ si et seulement si*

$$\int_{E\times F} |f(x,y)|\,\mu(dx)\nu(dy) = \int_E\left(\int_F |f(x,y)|\,\nu(dy)\right)\mu(dx) = \int_F\left(\int_E |f(x,y)|\,\mu(dx)\right)\nu(dy) < +\infty.$$

- Rappelons que f est définie μ-p.p. s'il existe $N\in\mathscr{A}$ tel que $\mu(N)=0$ et f est définie sur N^c.
- Dans ce cas,

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \int_E f(x)\mathbf{1}_{N^c}(x)\,\mu(dx).$$

Théorème (Fubini)**.** *Soient $(E,\mathscr{A},\mu)$ et $(F,\mathscr{B},\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et f une application de $E\times F$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$ une application $\mu\otimes\nu$-intégrable. Alors,*

$$\int_{E\times F} f(x,y)\,\mu(dx)\nu(dy) = \int_E\left(\int_F f(x,y)\,\nu(dy)\right)\mu(dx) = \int_F\left(\int_E f(x,y)\,\mu(dx)\right)\nu(dy).$$

- Ceci signifie que :

- Pour μ-presque tout $x \in E$, $y \longmapsto f(x,y)$ est ν-intégrable ; de plus, $x \longmapsto \int_F f(x,y)\,\nu(dy)$ est définie μ-presque partout et μ-intégrable.
- Pour ν-presque tout $y \in F$, $x \longmapsto f(x,y)$ est μ-intégrable ; de plus, $y \longmapsto \int_F f(x,y)\,\mu(dx)$ est définie ν-presque partout et ν-intégrable.

Exemple(s). Montrons que

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,\lambda(dx) = \pi\, e^{-|t|}.$$

On rappelle que, pour $a>0$ et $t \in \mathbf{R}$,

$$\int_{\mathbf{R}} e^{itx} e^{-a|x|}\,\lambda(dx) = 2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^\infty e^{itx} e^{-ax}\,dx\right) = 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{a-it}\right) = \frac{2a}{a^2+t^2}.$$

`2017/2018 : fin du cours 13`

Pour t fixé, on considère la fonction continue sur $\mathbf{R}^2$, $f_t(x,y) = e^{i(y+t)x} e^{-a|x|} e^{-|y|}$. Comme $|f_t(x,y)| \le e^{-a|x|} e^{-|y|}$, f_t est intégrable sur $\mathbf{R}^2$ par rapport à la mesure de Lebesque. On a alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2} f_t(x,y)\,\lambda_2(dx,dy) &= \int_{\mathbf{R}} \left(e^{itx} e^{-a|x|} \int_{\mathbf{R}} e^{-iyx} e^{-|y|}\,\lambda(dy)\right)\lambda(dx) = \int_{\mathbf{R}} e^{itx} e^{-a|x|} \frac{2}{1+x^2}\,\lambda(dx),\\ &= \int_{\mathbf{R}} \left(e^{-|y|} \int_{\mathbf{R}} e^{i(y+t)x} e^{-a|x|}\,\lambda(dx)\right)\lambda(dy) = \int_{\mathbf{R}} e^{-|y|} \frac{2a}{a^2+(y+t)^2}\,dy.\end{aligned}$$

On a donc, via $z = (y+t)/a$,

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} e^{-a|x|}\,\lambda(dx) = \int_{\mathbf{R}} \frac{a}{a^2+(y+t)^2} e^{-|y|}\,dy = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+z^2} e^{-|az-t|}\,\lambda(dz).$$

Puisque,

$$\left|\frac{e^{itx}}{1+x^2} e^{-a|x|}\right| \le \frac{1}{1+x^2} \in \mathrm{L}^1, \qquad \left|\frac{1}{1+z^2} e^{-|az-t|}\right| \le \frac{1}{1+z^2} \in \mathrm{L}^1,$$

le théorème de convergence dominée permet de passer à la limite quand $a \to 0^+$ dans la 1re et la 3e intégrale, pour obtenir

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,\lambda(dx) = \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-|t|}}{1+z^2}\,\lambda(dz) = \pi\, e^{-|t|}.$$

2. Changement de variable.

- Commençons par un résultat pratique

Proposition. *Soit u l'application de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}_+$ définie par $u(x) = \|x\|$. Alors $u_*(\lambda_d)$ est la mesure de densité $d\,V_d\,x^{d-1}$ par rapport à λ_1 sur $\mathbf{R}_+$ où $V_d = \lambda_d(\{x \in \mathbf{R}^d : \|x\| \le 1\})$ est le volume de la boule unité.*

- On peut montrer que

$$V_d = \frac{\pi^{d/2}}{(d/2)!} \quad \text{si } d \text{ est pair,} \qquad V_d = \frac{2^d \pi^{(d-1)/2}((d-1)/2)!}{d!} \quad \text{si } d \text{ est impair.}$$

Démonstration. Soit $r > 0$. $u_* (\lambda_d)([0,r]) = \lambda_d \left(\{x \in \mathbf{R}^d : \|x\| \le r\}\right) = r^d V_d$. Il suffit alors d'écrire

$$u_* (\lambda_d)([0,r]) = \int_0^r d\, V_d\, x^{d-1}\, dx = \int_{\mathbf{R}_+} \mathbf{1}_{[0,r]}(x)\, d\, V_d\, x^{d-1}\, \lambda_1(dx),$$

et d'appliquer le résultat d'égalité de deux mesures. □

Corollaire. *Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ borélienne. Alors*

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(\|x\|)\, \lambda_d(dx) = d V_d \int_{\mathbf{R}_+} f(x) x^{d-1}\, \lambda_1(dx).$$

En particulier, $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur $\mathbf{R}^d$ si et seulement si $\alpha > d$, $x \longmapsto \dfrac{1}{\|x\|^\alpha} \mathbf{1}_{0<\|x\|\le 1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}^d$ si et seulement si $\alpha < d$.

- Rappelons la définition de $\mathscr{C}^1$-difféormorphisme.

Définition. Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^d$. Une application $\psi : U \longrightarrow \mathbf{R}^d$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme si

1. $\psi(U)$ est un ouvert de $\mathbf{R}^d$;
2. ψ est une bijection bicontinue de U sur $\psi(U)$;
3. ψ et ψ^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$.

- On note J_ψ le jocobien de ψ c'est à dire $J_\psi(x) = \det(D\psi(x))$.

Proposition. *Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et ψ une application de U dans $\mathbf{R}^d$. ψ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphsime de U si et seulement si ψ est de classe $\mathscr{C}^1$, injective et J_ψ ne s'annule pas sur U.*

Théorème. *Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et ψ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U. On note V l'ouvert $\psi(U)$.*

1. *Soit $f : V \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une application mesurable. Alors*
$$\int_V f(y)\, \lambda_d(dy) = \int_U f(\psi(x))\, |J_\psi(x)|\, \lambda_d(dx).$$
2. *Soit f une application mesurable de V dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{C}$. Alors f est intégrable sur V si et seulement si $f \circ \psi\, |J_\psi|$ est intégrable sur U et dans ce cas*
$$\int_V f(y)\, \lambda_d(dy) = \int_U f(\psi(x))\, |J_\psi(x)|\, \lambda_d(dx).$$

- On pose $y = \psi(x)$, $dy = |J_\psi(x)|\, dx$.
- On applique souvent le résultat à la fonction $f \circ \psi$ avec ψ^{-1} i.e.

$$\int_U f(\psi(x))\, \lambda_d(dx) = \int_V f(y)\, |J_{\psi^{-1}}(y)|\, \lambda_d(dy).$$

Exemple(s). • Montrons à nouveau que

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

On calcule en fait I^2 en passant en coordonnées polaires. On a, notant Δ la demi-droite $\Delta = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq 0\}$,

$$I^2 = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = \int_{\mathbf{R}^2\setminus\Delta} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy.$$

L'application $\psi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ dans $\mathbf{R}^2\setminus\Delta$ et

$$D\psi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad J_\psi(r,\theta) = r.$$

Par conséquent,

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2/2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi.$$

• Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}_+$ borélienne.

$$\int_{\mathbf{R}}^{2} f(2x+y, x+2y)\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int_{\mathbf{R}^2} f(s,t)\,ds\,dt.$$

On pose $s = 2x+y,\ t = x+2y$ i.e.

$$D\psi(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad J_\psi(x,y) = 3, \quad \text{« } ds\,dt = 3\,dx\,dy \text{ »}$$

2017/2018 : fin du cours 14