MATH602 : Intégration

Contrôle n° 1, durée 2 heures.

Lundi 26 mars 2018.

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 (Cours et applications directes, 5 points)**.**

1. Donner la définition d'une tribu.
2. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $B \in \mathcal{A}$ tel que $0 < \mu(B) < +\infty$.

   (a) Montrer que l'application μ_B définie sur $\mathcal{A}$ par

$$\mu_B(A) := \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$$

est une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{A})$.

   (b) Sur $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}))$, on considère $\mu = \sum_{k \geq 1} 2^{-k} \delta_k$ et $B = \{2k, k \in \mathbf{N}\}$.
   Calculer $\mu(B)$ et, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mu_B(\{k\})$. En déduire l'expression de μ_B.

3. On pose, pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 1} n e^{-nx}$. Calculer $\displaystyle\int_{[1,+\infty[} f(x)\, \lambda(dx)$, λ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 2.

1. Soit $(\mu_k)_{k \geq 0}$ une suite de mesures positives sur $(E, \mathcal{A})$ telle que, pour $A \in \mathcal{A}$ et $k \in \mathbf{N}$, $\mu_k(A) \leq \mu_{k+1}(A)$. On pose, pour $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \sup_{k \geq 0} \mu_k(A)$.
   Montrer que μ est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.
2. Sur $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}))$, on définit, pour tous $j \in \mathbf{N}$ et $A \subset \mathbf{N}$,

$$\nu_j(A) = \operatorname{card}(A \cap [j, +\infty[) \quad \text{si } A \text{ est fini}, \qquad \nu_j(A) = +\infty \quad \text{sinon.}$$

   (a) Montrer que, pour tout $j \in \mathbf{N}$, ν_j est une mesure positive sur $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}))$.

   (b) Montrer que, pour tout $A \subset \mathbf{N}$ et tout $j \in \mathbf{N}$, $\nu_j(A) \geq \nu_{j+1}(A)$.

   (c) On pose, pour $A \subset \mathbf{N}$, $\nu(A) = \inf_{j \geq 0} \nu_j(A)$. Calculer $\nu(\mathbf{N})$ et, pour tout entier k, $\nu(\{k\})$. ν est-elle une mesure positive ?

Exercice 3. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction mesurable.

1. (a) Montrer que

$$\forall x \in E, \qquad |f(x)| = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |f(x)| \, \mathbf{1}_{2^n \leq |f(x)| < 2^{n+1}}.$$

(b) En déduire que

$$\int_E |f(x)| \, \mu(dx) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_E |f(x)| \, \mathbf{1}_{2^n \leq |f(x)| < 2^{n+1}} \, \mu(dx).$$

2. Montrer que f est intégrable par rapport à μ si et seulement si

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} 2^n \mu \left(\left\{ x \in E : 2^n \leq |f(x)| < 2^{n+1} \right\} \right) < +\infty.$$

3. Soit $\alpha > 0$. Montrer que la fonction $x \longmapsto x^{-\alpha} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si $\alpha > 1$.

Fin de l'épreuve