MATH602 : Correction du CC1 2017/2018

Exercice 1.

1. Soient E un ensemble non vide et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. $\mathcal{A}$ est une tribu sur E si
   1. $\emptyset \in E$;
   2. pour tout $A \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$;
   3. pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{A}$, $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

2. (a) On a $\mu_B(\emptyset) = \mu(\emptyset)/\mu(B) = 0$ et $\mu(E) = \mu(B)/\mu(B) = 1$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{A}$ une suite d'ensembles deux à deux disjoints. Les ensembles $(A_n \cap B)_{n\in\mathbf{N}}$ sont également deux à deux disjoints et par conséquent

$$\begin{aligned}\mu_B\left(\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) &= \mu(B)^{-1}\mu\left(B \cap \cup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \mu(B)^{-1}\mu\left(\cup_{n\in\mathbf{N}}(A_n \cap B)\right) \\ &= \mu(B)^{-1}\sum_{n\geq 0}\mu(A_n\cap B) = \sum_{n\geq 0}\mu_B(A_n).\end{aligned}$$

μ est donc une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{A})$.

(b) On a, puisque $B = \cup_{j\in\mathbf{N}}\{2j\}$, $\mu(B) = \sum_{j\geq 0}\mu(\{2j\})$. Pour tout $j \in \mathbf{N}^*$,

$$\mu(\{2j\}) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}\,\delta_k(\{2j\}) = 2^{-2j} = 4^{-j}, \qquad \mu(\{0\}) = 0.$$

Par conséquent,

$$\mu(B) = \sum_{j\geq 1} 4^{-j} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}.$$

Si k est nul ou impair, $\mu_B(\{k\}) = 0$. Si $k = 2j$ avec $j \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\mu_B(\{k\}) = \mu(B)^{-1}\,\mu(\{2j\}) = 3 \times 4^{-j}.$$

Par conséquent, $\mu_B = 3\sum_{j\geq 1} 4^{-j}\,\delta_{2j}$.

3. Notons, pour $n \geq 1$ et $x \geq 1$, $u_n(x) = ne^{-nx}$. Pour tout $n \geq 1$, la fonction u_n est continue et positive sur $[1, +\infty[$. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\int_{[1,+\infty[} f(x)\,\lambda(dx) = \int_{[1,+\infty[}\sum_{n\geq 1} u_n(x)\,\lambda(dx) = \sum_{n\geq 1}\int_{[1,+\infty[} u_n(x)\,\lambda(dx).$$

Par ailleurs, la fonction u_n étant continue et positive sur $[1, +\infty[$,

$$\int_{[1,+\infty[} f(x)\,\lambda(dx) = \lim_{u\to+\infty}\int_1^u ne^{-nx}\,dx = \lim_{u\to\infty}\left[-e^{-nx}\right]_1^u = e^{-n}.$$

Par conséquent,

$$\int_{[1,+\infty[} f(x)\,\lambda(dx) = \sum_{n\geq 1} e^{-n} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e-1}.$$

Exercice 2. 1. On a $\mu(\emptyset) = 0$. La suite $(\mu_k)_{k\geq 0}$ étant croissante, pour $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \lim_{k\to\infty}\mu_k(A)$. Si A et B sont deux parties disjointes de $\mathcal{A}$,

$$\mu(A\cup B) = \lim_{k\to\infty}\mu_k(A\cup B) = \lim_{k\to\infty}\left(\mu_k(A) + \mu_k(B)\right) = \lim_{k\to\infty}\mu_k(A) + \lim_{k\to\infty}\mu_k(B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Si $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{A}$ est une suite croissante,

$$\mu\left(\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \sup_{k\geq 0}\mu_k\left(\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \sup_{k\geq 0}\sup_{n\geq 0}\mu_k(A_n) = \sup_{n\geq 0}\sup_{k\geq 0}\mu_k(A_n) = \sup_{n\geq 0}\mu(A_n).$$

D'après la définition alternative de mesure vue en cours, ceci montre que μ est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

2. Remarquons que, pour tous $j \in \mathbf{N}$ et $A \subset \mathbf{N}$,

$$\nu_j(A) = \sum_{k \geq j} \delta_k(A).$$

ν_j est la mesure de densité $\mathbf{1}_{[j,+\infty[}$ par rapport à la mesure de comptage $\gamma_{\mathbf{N}} = \sum_{k\geq 0} \delta_k$.

(a) Une somme de mesures positives étant une mesure positive, pour tout $j \in \mathbf{N}$, ν_j est une mesure positive.

(b) Soient $A \subset \mathbf{N}$ et $j \in \mathbf{N}$. On a

$$\nu_j(A) = \sum_{k \geq j} \delta_k(A) = \delta_j(A) + \nu_{j+1}(A) \geq \nu_{j+1}(A).$$

(c) Pour tout $j \in \mathbf{N}$, $\nu_j(\mathbf{N}) = +\infty$. Donc $\nu(\mathbf{N}) = +\infty$. Soit $k \in \mathbf{N}$. On a $\nu_{k+1}(\{k\}) = 0$ puisque $\{k\} \cap [k+1, +\infty[= \emptyset$. Par conséquent, $\nu(\{k\}) = 0$. ν n'est pas une mesure positive car $\mathbf{N} = \cup_{k\in\mathbf{N}}\{k\}$ et

$$+\infty = \nu(\mathbf{N}) = \nu\left(\cup_{k\in\mathbf{N}}\{k\}\right) > \sum_{k\geq 0} \nu(\{k\}) = 0.$$

Exercice 3. 1. (a) La formule est vraie si $f(x) = 0$. Soit $x \in E$ tel que $|f(x)| > 0$. Il existe un unique $k \in \mathbf{Z}$ tel que $2^k \leq |f(x)| < 2^{k+1}$; pour être précis $k = [\ln|f(x)|/\ln 2]$. Par conséquent, une et une seule indicatrice vaut un dans la somme ce qui donne l'égalité.

(b) Par convergence monotone,

$$\int_E |f(x)|\,\mu(dx) = \int_E \sum_{n\in\mathbf{Z}} |f(x)|\,\mathbf{1}_{2^n \leq |f(x)| < 2^{n+1}}\,\mu(dx) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_E |f(x)|\,\mathbf{1}_{2^n \leq |f(x)| < 2^{n+1}}\,\mu(dx).$$

2. Puisque f est mesurable, f est intégrable par rapport à μ si et seulement si

$$\int_E |f(x)|\,\mu(dx) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_E |f(x)|\,\mathbf{1}_{2^n \leq |f(x)| < 2^{n+1}}\,\mu(dx) < +\infty$$

Or, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$2^n \mu\left(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}\right) \leq \int_E |f(x)|\,\mathbf{1}_{2^n \leq |f(x)| < 2^{n+1}}\,\mu(dx) \leq 2^{n+1}\mu\left(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}\right).$$

Par conséquent, comme $2^{n+1} = 2 \times 2^n$,

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} 2^n \mu\left(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}\right) \leq \int_E |f(x)|\,\mu(dx) \leq 2 \sum_{n\in\mathbf{Z}} 2^n \mu\left(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}\right).$$

Le résultat s'en suit immédiatement.

3. Notons $f(x) = x^{-\alpha}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$ où $\alpha > 0$; $\left\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\right\} = \emptyset$ si $n > 0$, $\left\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\right\} = \{1\}$ si $n = 0$ et

$$\left\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\right\} = \left]2^{-(n+1)/\alpha}, 2^{-n/\alpha}\right] \text{ si } n < 0.$$

Par conséquent, $\lambda\left(\left\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\right\}\right) = 0$ si $n \in \mathbf{N}$ et pour $n = -p$

$$\lambda\left(\left\{2^{-p} \leq |f| < 2^{-p+1}\right\}\right) = 2^{p/\alpha}\left(1 - 2^{-1/\alpha}\right).$$

On a alors

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} 2^n \lambda\left(\left\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\right\}\right) = \left(1 - 2^{-1/\alpha}\right)\sum_{p\geq 1} 2^{-p}2^{p/\alpha} = \left(1 - 2^{-1/\alpha}\right)\sum_{p\geq 1} 2^{-p(1-1/\alpha)}.$$

Cette dernière série converge si et seulement si $1 - 1/\alpha > 0$ c'est à dire $\alpha > 1$. La question précédente permet bien de retrouver le critère de Riemann.

Fin de l'épreuve