MATH602 : Intégration

Contrôle n° 2, durée 3 heures.

Mardi 15 mai 2018.

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 (Applications directes du cours)**.**

1. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ où, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{n\sin(x/n)}{1+x^2}\,dx.$$

2. Soient $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < y\}$. Calculer

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-\alpha x}\, e^{-\beta y}\, \mathbf{1}_\Delta(x,y)\,dxdy.$$

3. Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction borélienne et positive. On considère

$$I = \int_{\mathbf{R}^2} f(u,v)\,dudv, \qquad J = \int_{\mathbf{R}^2} f(3x, x-2y)\,dxdy.$$

Exprimer I en fonction de J.

Exercice 2. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ telle que $\mu([-1,1]) = 1$. On considère la fonction

$$L(z) = \int_{\mathbf{R}} e^{zx}\,\mu(dx), \quad z \in \mathbf{C}.$$

1. Montrer que L est bien définie sur $\mathbf{C}$ et que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \qquad L(z) = \int_{[-1,1]} e^{zx}\,\mu(dx).$$

2. Établir que, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$L(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \int_{[-1,1]} x^n\,\mu(dx).$$

Exercice 3. On considère la fonction F définie par

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2tx)\, dx, \quad t \in \mathbf{R}.$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.
2. En utilisant une intégration par partie, montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad F'(t) + 2t\, F(t) = 0.$$

3. (a) À l'aide d'un changement de variable, calculer

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy.$$

   (b) En déduire que $F(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   (c) Donner une expression simple de $F(t)$.

Exercice 4. 1. Pour tout $x > 0$, calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy.$$

2. En utilisant le théorème de Fubini dont on justifiera l'emploi, en déduire que, pour $A > 0$,

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^A \sin x\, e^{-xy}\, dx \right) dy.$$

3. (a) Pour tous $y > 0$ et $A > 0$, calculer

$$\int_0^A \sin x\, e^{-xy}\, dx.$$

   (b) En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5. On considère les fonctions

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx, \qquad B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx.$$

1. Justifier brièvement que $\Gamma(a)$ et $B(a,b)$ sont bien définis pour $a > 0$ et $b > 0$.
2. Montrer que, pour $a > 0$ et $b > 0$, $\Gamma(a)\Gamma(b) = B(a,b)\,\Gamma(a+b)$.

   `Indication.` On pourra faire le changement de variable $u = x + y$, $v = \dfrac{x}{x+y}$.

`Fin de l'épreuve`