MATH602 : Correction du CC2 2017/2018

Exercice 1.

1. Pour tout $n \geq 1$, la fonction $x \longmapsto n\sin(x/n)(1+x^2)^{-1}$ est continue sur $\mathbf{R}$ donc borélienne. Par ailleurs, pour tout $x \in [0,1]$, $\lim_{n\to\infty} n\sin(x/n)(1+x^2)^{-1} = x(1+x^2)^{-1}$. Finalement, puisque $|\sin x| \leq |x|$, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sup_{n\geq 1}\left|n\sin(x/n)\left(1+x^2\right)^{-1}\right| \leq |x|\left(1+x^2\right)^{-1}.$$

la fonction $x \longmapsto |x|\left(1+x^2\right)^{-1}$ étant intégrable sur $[0,1]$, on a, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\sin(x/n)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{n\sin(x/n)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

2. La fonction $(x,y) \longmapsto e^{-\alpha x}e^{-\beta y}$ est continue sur $\mathbf{R}^2$ et Δ, qui est un ouvert de $\mathbf{R}^2$, appartient à $\mathcal{B}\left(\mathbf{R}^2\right)$. Par conséquent, $(x,y) \longmapsto e^{-\alpha x}e^{-\beta y}\,\mathbf{1}_\Delta(x,y)$ est borélienne. Cette fonction étant d'autre part positive, le théorème de Tonelli conduit à

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-\alpha x}e^{-\beta y}\,\mathbf{1}_\Delta(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbf{R}}\left(\int_{\mathbf{R}} e^{-\alpha x}e^{-\beta y}\,\mathbf{1}_\Delta(x,y)\,dy\right)dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\left(\int_x^{+\infty} e^{-\beta y}\,dy\right)dx.$$

Un calcul élémentaire donne alors

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-\alpha x}e^{-\beta y}\,\mathbf{1}_\Delta(x,y)\,dxdy = \frac{1}{\beta(\alpha+\beta)}.$$

3. La matrice $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ étant inversible, $(u,v) = \psi(x,y) = (3x, x-2y)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféormorphisme de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même. Par ailleurs, $J_\psi(x,y) = -6$. D'après la formule du changement de variable,

$$I = \int_{\mathbf{R}^2} f(u,v)\,dudv = \int_{\mathbf{R}^2} f(\psi(x,y))\,|J_\psi(x,y)|\,dxdy = 6J.$$

Exercice 2. 1. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, $x \longmapsto e^{zx}$ est borélienne car continue. Puisque μ est une mesure de probabilité, $\mu\left([-1,1]^c\right) = 0$, $e^{zx} = e^{zx}\mathbf{1}_{[-1,1]}$ pour μ-presque tout x. Par suite,

$$\int_{\mathbf{R}} |e^{zx}|\,\mu(dx) = \int_{[-1,1]} |e^{zx}|\,\mu(dx) \leq e^{|\mathrm{Re}(z)|}\,\mu([-1,1]) \leq e^{|z|} < +\infty.$$

Par conséquent, pour tout $z \in \mathbf{C}$, $x \longmapsto e^{zx}$ est μ-intégrable. Ceci montre que L est définie sur $\mathbf{C}$ et, puisque $e^{zx} = e^{zx}\mathbf{1}_{[-1,1]}$ pour μ-presque tout x, on a

$$L(z) = \int_{[-1,1]} e^{zx}\,\mu(dx).$$

2. Pour tous $z \in \mathbf{C}$ et $x \in [-1,1]$, $e^{zx} = \sum_{n\geq 0}\dfrac{z^n x^n}{n!}$. On a, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$\sum_{n\geq 0}\int_{[-1,1]}\left|\frac{z^n x^n}{n!}\right|\mu(dx) \leq \sum_{n\geq 0}\frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} < +\infty.$$

D'après le corollaire du théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions, il vient, pour $z \in \mathbf{C}$,

$$L(z) = \int_{[-1,1]}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n x^n}{n!}\,\mu(dx) = \sum_{n\geq 0}\int_{[-1,1]}\frac{z^n x^n}{n!}\,\mu(dx) = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}\int_{[-1,1]} x^n\,\mu(dx).$$

Exercice 3. 1. Pour $t \in \mathbf{R}$ et $x > 0$, posons $f(t,x) = e^{-x^2}\cos(2tx)$. Nous avons :

— Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(t,x)$ est borélienne sur $\mathbf{R}_+^*$ car continue.

— Pour tout $x > 0$, $t \longmapsto f(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x > 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -2xe^{-x^2}\sin(2tx).$$

— La fonction $f(0,x) = e^{-x^2}$ est intégrable $\mathbf{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq 2|x|e^{-x^2} \in \mathrm{L}^1\left(\mathbf{R}_+^*\right).$$

D'après le théorème de régularité des intégrales à paramètre, F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad F'(t) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx = \int_0^{+\infty}(-2xe^{-x^2})\sin(2tx)\,dx.$$

2. Puisque $\left(e^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2}$, on obtient en faisant une intégration par parties, pour tout réel t,

$$F'(t) = \left[e^{-x^2}\sin(2tx)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x^2}2t\cos(2tx)\,dx = -2tF(t).$$

3. (a) La fonction ψ définie par $(x,y) = \psi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,\pi/2[$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. De plus, $|J_\psi(r,\theta)| = r$. On obtient alors

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2}\,rdrd\theta = \frac{\pi}{4}.$$

(b) D'après le théorème de Tonelli, on a

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = F(0)^2,$$

et, comme $F(0) \geq 0$, il vient $F(0) = \sqrt{\pi}/2$.

(c) D'après la question 2, $F(t) = F(0)\,e^{-t^2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-t^2}$.

Exercice 4. 1. Pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy = \frac{1}{x}.$$

2. Soit $A > 0$. La fonction $(x,y) \longmapsto \sin(x)e^{-xy}$ est intégrable sur $]0,A[\times]0,+\infty[$. En effet, cette fonction est borélienne car continue et, d'après le théorème de Tonelli,

$$\int_0^A\int_0^{+\infty}|\sin x|e^{-xy}\,dxy = \int_0^A\frac{|\sin x|}{x}\,dx \leq A < +\infty.$$

D'après le théorème de Fubini,

$$\int_0^A\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^A \sin x\left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy\right)dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^A \sin x\,e^{-xy}\,dx\right)dy.$$

3. Soient $A > 0$ et $y > 0$. On a

$$\int_0^A \sin x\,e^{-xy}\,dx = \int_0^A \mathrm{Im}\left(e^{ix-xy}\right)\,dx = \left[\mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix-xy}}{i-y}\right)\right]_0^A.$$

D'autre part,

$$\mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix-xy}}{i-y}\right) = \frac{e^{-xy}}{1+y^2}\mathrm{Im}\left(-(i+y)e^{ix}\right) = \frac{e^{-xy}}{1+y^2}\left(-\cos x - y\sin x\right),$$

et par conséquent
$$\int_0^A \sin x\, e^{-xy}\,dx = -\frac{e^{-Ay}}{1+y^2}\,(\cos A + y\sin A) + \frac{1}{1+y^2}.$$

4. Puisque $x \longmapsto \sin x/x$ est Riemann-intégrable sur $]0,+\infty[$ (sans être Lebesgue-intégrable),
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{e^{-Ay}}{1+y^2}\,(\cos A + y\sin A)\right)dy.$$

Pour tout $y>0$,
$$\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{e^{-Ay}}{1+y^2}\,(\cos A + y\sin A)\right) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Par ailleurs, pour tout $y>0$,
$$\sup_{A\geq 1}\left|\frac{1}{1+y^2} - \frac{e^{-Ay}}{1+y^2}\,(\cos A + y\sin A)\right| \leq \frac{1}{1+y^2} + e^{-y}\frac{1+y}{1+y^2} \leq \frac{1}{1+y^2} + \frac{3}{2}\,e^{-y} \in \mathrm{L}^1\left(]0,+\infty[\right).$$

D'après le théorème de convergence dominée,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{e^{-Ay}}{1+y^2}\,(\cos A + y\sin A)\right)dy = \int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5. 1. Puisque $x \longmapsto x^{a-1}e^{-x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, le critère de Riemann en 0 montre que $\Gamma(a)$ et $B(a,b)$ sont définies pour $a>0$ et $b>0$.

2. Fixons $a>0$ et $b>0$. D'après le théorème de Tonelli,
$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_{]0,+\infty[^2} e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}\,dxdy.$$

Considérons la fonction $\psi :]0,+\infty[^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $\psi(x,y) = \left(x+y, \dfrac{x}{x+y}\right)$ et montrons que ψ est un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme sur $]0,+\infty[^2$. Il est clair que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$. Il s'agit de vérifier que ψ est injective sur $]0,+\infty[^2$ et que $J_\psi(x,y)\neq 0$ si $(x,y)\in]0,+\infty[^2$.

Si $\psi(x,y)=\psi(x',y')$ on a $x+y=x'+y'$ et $\dfrac{x}{x+y} = \dfrac{x'}{x'+y'}$ d'où l'on déduit immédiatement $x=x'$ puis $y=y'$. D'autre part, on a
$$J_\psi(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{y}{(x+y)^2} & \dfrac{-x}{(x+y)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x+y},$$
qui est bien sûr non nul sur $]0,+\infty[^2$. Par conséquent, ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[^2$ sur $\psi\left(]0,+\infty[^2\right)$. Si x et y sont strictement positifs on a $x<x+y$ de sorte que $\psi\left(]0,+\infty[^2\right)\subset]0,+\infty[\times]0,1[$. Montrons l'inclusion inverse. Pour $(u,v)\in]0,+\infty[\times]0,1[$, résolvons l'équation $\psi(x,y)=(u,v)$; on obtient facilement $(x,y)=(uv,u(1-v))=\psi^{-1}(u,v)$ qui appartient à $]0,+\infty[^2$. D'où $\psi\left(]0,+\infty[^2\right)=]0,+\infty[\times]0,1[$.

On calcule $\Gamma(a)\Gamma(b)$ – la fonction à intégrer est positive – à l'aide du changement de variables $(u,v)=\psi(x,y)$. Pour cela on exprime $e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}/|J_\psi(x,y)|$ en fonction des nouvelles coordonnées, soit
$$\frac{e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}}{|J_\psi(x,y)|} = e^{-u}\,(uv)^{a-1}\,(u(1-v))^{b-1}\,u = e^{-u}u^{a+b-1}v^{a-1}(1-v)^{b-1}.$$

Finalement, on obtient
$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_{]0,+\infty[^2} e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}\,dxdy = \int_{]0,+\infty[\times]0,1[} e^{-u}u^{a+b-1}v^{a-1}(1-v)^{b-1}\,dudv$$
et d'après le théorème de Tonelli
$$\Gamma(a)\,\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\,B(a,b).$$