MATH602 : Intégration

Devoir Maison n° 1.

À rendre le vendredi 23 mars 2018 en TD.

Exercice 1. Soit $\rho > 0$. Sur $\mathcal{P}(\mathbf{N})$, on définit l'application μ suivante :

$$\mu(A) = \begin{cases} \sum_{k\in A} \rho^k, & \text{si } A \text{ est un ensemble fini,} \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que, pour tous $(A_k)_{1\le k\le n}$ deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

2. Soit $A = \{2k,\ k \in \mathbf{N}\}$ l'ensemble des entiers pairs. Calculer, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\mu(A), \quad \mu\left(A^c\right), \quad \mu(\{0,\dots,n\}), \quad \mu(A \cap \{0,\dots,n\}).$$

3. Pour quelles valeurs de ρ, μ est-elle une mesure positive sur $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}))$?

Exercice 2. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction mesurable. On note $\{f \ge a\}$ à la place de $\{x \in E : f(x) \ge a\}$, etc.

1. Montrer que

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \sum_{n\ge 0} \int_E f(x)\mathbf{1}_{\{n\le f<n+1\}}(x)\,\mu(dx).$$

En déduire que

$$\sum_{n\ge 1} n\mu(\{n \le f < n+1\}) \le \int_E f(x)\,\mu(dx) \le \sum_{n\ge 0}(n+1)\mu(\{n \le f < n+1\}).$$

2. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\mu(\{f \ge k\}) = \sum_{n\ge k} \mu(\{n+1 > f \ge n\}).$$

(b) En déduire que

$$\sum_{k\ge 1} \mu(\{f \ge k\}) = \sum_{n\ge 1} n\mu\left(\{n \le f < n+1\}\right).$$

(c) En déduire que

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\ge 1} \mu(\{f \ge n\}) < +\infty.$$

3. On suppose que $\mu(E) < +\infty$. Montrer que

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n\ge 0} \mu(\{f \ge n\}) < +\infty.$$

Fin de l'épreuve