MATH602 : Correction du DM n° 1

Exercice 1. 1. Soit $(A_k)_{1\le k\le n}$ des sous-ensembles deux à deux disjoints de $\mathbf{N}$. Leur réunion (finie) est de cardinal infini si et seulement si au moins l'un d'eux est de cardinal infini et dans ce cas,

$$\mu\left(\bigcup_{1\le k\le n} A_k\right) = +\infty = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Supposons à présent qu'ils soient tous de cardinal fini. Il en est de même pour leur réunion et

$$\mu\left(\bigcup_{1\le k\le n} A_k\right) = \sum_{l\in\cup_{1\le k\le n}A_k} \rho^l = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l\in A_k}\rho^l = \sum_{k=1}^{n}\mu(A_k).$$

Le calcul ci-dessus ne pose aucun problème puisque toutes les sommes portent sur un nombre fini de termes.

2. Les ensembles A et A^c sont de cardinal infini donc $\mu(A)$ et $\mu(A^c)$ valent $+\infty$. Les autres ensembles sont de cardinal fini donc, pour $n\in\mathbf{N}^*$,

$$\mu(\{0,\dots,n\}) = \sum_{k=0}^{n}\rho^k = \begin{cases} n+1, & \text{si } \rho=1,\\ \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}, & \text{si } \rho\ne 1.\end{cases}$$

Si $n=2p$ avec $p\in\mathbf{N}^*$, $A\cap\{0,\dots,n\} = \{0,2,4,\dots,2p\}$ et

$$\mu(A\cap\{0,\dots,n\}) = \sum_{k=0}^{p}\rho^{2k} = \sum_{k=0}^{p}\left(\rho^2\right)^k = \begin{cases} p+1 = (n+2)/2, & \text{si } \rho=1,\\ \frac{1-\rho^{2(p+1)}}{1-\rho^2} = \frac{1-\rho^{n+2}}{1-\rho^2}, & \text{si } \rho\ne 1,\end{cases}$$

et, lorsque $n=2p-1$ avec $p\in\mathbf{N}$, $A\cap\{0,\dots,n\} = \{0,2,4,\dots,2(p-1)\}$ et

$$\mu(A\cap\{0,\dots,n\}) = \sum_{k=0}^{p-1}\rho^{2k} = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\rho^2\right)^k = \begin{cases} p = (n+1)/2, & \text{si } \rho=1,\\ \frac{1-\rho^{2p}}{1-\rho^2} = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho^2}, & \text{si } \rho\ne 1.\end{cases}$$

3. Puisque $\mu(\emptyset)=0$, d'après la question 1 et la définition équivalente d'une mesure (voir cours), pour que μ soit une mesure, il faut et il suffit que, pour toute suite croissante d'ensembles $(B_n)_{n\ge1}$, la mesure de la réunion soit égale à la limite de la suite $(\mu(B_n))_{n\ge1}$.

Si $\rho<1$, il est facile de voir que μ n'est pas une mesure. En effet, posons $B_n=\{0,\dots,n\}$. Alors $(\mu(B_n))_{n\ge1}$ est une suite croissante qui converge vers $1/(1-\rho)$ alors que la réunion des ensembles $(B_n)_{n\ge1}$ est $\mathbf{N}$ qui est de mesure infinie.

Soit $\rho\ge1$. Soit $(B_n)_{n\ge1}$ une suite croissante d'ensembles inclus dans $\mathbf{N}$. Notons B leur réunion.

— Si B est de cardinal fini, la suite est constante à partir d'un certain rang : il existe n_0 tel que, pour tout $n\ge n_0$, $B_n=B_{n_0}=B$. Dans ce cas, la propriété est toujours satisfaite.

— Si B est de cardinal infini, alors $\mu(B)=+\infty$. D'autre part, $\mu(B_n)$ est supérieur au cardinal de B_n puisque $\rho^k\ge1$ pour tout $k\in\mathbf{N}$. Or, le cardinal de B_n tend vers $+\infty$, ce qui assure que $\mu(B_n)$ tend vers $+\infty=\mu(B)$.

μ est une mesure positive si et seulement si $\rho\ge1$.

Tournez S.V.P.

Exercice 2. 1. Puisque f est positive, pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} f(x)\,\mathbf{1}_{\{n\leq f<n+1\}}(x),$$

et, par convergence monotone,

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \sum_{n\geq 0}\int_E f(x)\mathbf{1}_{\{n\leq f<n+1\}}(x)\,\mu(dx).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in E$,

$$n\mathbf{1}_{\{n\leq f<n+1\}}(x) \leq f(x)\mathbf{1}_{\{n\leq f<n+1\}}(x) \leq (n+1)\mathbf{1}_{\{n\leq f<n+1\}}(x),$$

et, on obtient, puisque $\int \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A)$ et $n\mu(\{n \leq f < n+1\})$ est nul pour $n = 0$,

$$\sum_{n\geq 1} n\mu(\{n\leq f<n+1\}) \leq \int_E f(x)\,\mu(dx) \leq \sum_{n\geq 0}(n+1)\mu(\{n\leq f<n+1\}).$$

2. (a) Soit $k \in \mathbf{N}$. De manière évidente,

$$\{f\geq k\} = \bigcup\nolimits_{n\geq k}\{n+1>f\geq n\}$$

et, comme les ensembles $\{n+1 > f \geq n\}$ sont deux à deux disjoints,

$$\mu(\{f\geq k\}) = \mu\left(\bigcup\nolimits_{n\geq k}\{n+1>f\geq n\}\right) = \sum_{n\geq k}\mu(\{n+1>f\geq n\}).$$

(b) On a

$$\sum_{k\geq 1}\mu(\{f\geq k\}) = \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq k}\mu(\{n+1>f\geq n\}) = \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1}\mu(\{n+1>f\geq n\})\,\mathbf{1}_{n\geq k}.$$

On obtient en permutant les deux sommes — ce qui est justifié car tout est positif —

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}\mu(\{f\geq k\}) &= \sum_{n\geq 1}\mu(\{n+1>f\geq n\})\sum_{k\geq 1}\mathbf{1}_{n\geq k} = \sum_{n\geq 1}\mu(\{n+1>f\geq n\})\sum_{k=1}^{n}1\\ &= \sum_{n\geq 1}n\mu(\{n+1>f\geq n\}).\end{aligned}$$

(c) On d'après les questions 1 et 2(b),

$$\sum_{n\geq 1}\mu(\{f\geq n\}) \leq \int_E f(x)\,\mu(dx)$$

ce qui montre l'implication.

3. Si μ est finie, alors $\mu(\{f \geq 0\}) = \mu(E) < +\infty$ et, lorsque f est μ-intégrable

$$\sum_{n\geq 0}\mu(\{f\geq n\}) = \mu(\{f\geq 0\}) + \sum_{n\geq 1}\mu(\{f\geq n\}) \leq \mu(\{f\geq 0\}) + \int_E f(x)\,\mu(dx) < +\infty.$$

Par ailleurs, d'après la question 2(a),

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}(n+1)\mu(\{n\leq f<n+1\}) &= \sum_{n\geq 1}n\mu(\{n\leq f<n+1\}) + \sum_{n\geq 0}\mu(\{n\leq f<n+1\}),\\ &= \sum_{k\geq 1}\mu(\{f\geq k\}) + \mu(\{f\geq 0\}) = \sum_{k\geq 0}\mu(\{f\geq k\}).\end{aligned}$$

L'encadrement de la première question se réécrit donc

$$\sum_{n\geq 1}\mu(\{f\geq n\}) \leq \int_E f(x)\,\mu(dx) \leq \sum_{n\geq 0}\mu(\{f\geq n\}).$$

Ceci montre que f est μ-intégrable lorsque $\sum_{n\geq 0}\mu(\{f \geq n\}) < +\infty$.

Fin de l'épreuve