MATH602 : Intégration

Deuxième session, durée 3 heures.

Mardi 26 juin 2018.

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 (Applications directes du cours)**.**

1. Soient E un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ une tribu sur E. Donner la définition d'une mesure μ sur $(E, \mathcal{A})$.

2. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction mesurable et positive. Montrer que l'application ν définie sur $\mathcal{A}$ par

$$\nu(A) = \int_A f(x)\,\mu(dx) = \int_E f(x)\mathbf{1}_A(x)\,\mu(dx), \quad A \in \mathcal{A},$$

est une mesure positive sur $(E, \mathcal{A})$. Montrer que, si $\mu(A) = 0$, alors $\nu(A) = 0$.

3. Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction borélienne et positive. On considère

$$I = \int_{\mathbf{R}^2} f(u, v)\,dudv, \qquad J = \int_{\mathbf{R}^2} f(2x + y, x - 3y)\,dxdy.$$

Exprimer I en fonction de J.

Exercice 2. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé. On considère

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu sur E.

Exercice 3. On considère, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{x^2} \frac{x^{1/n}}{1 + x^{1/n}}, \qquad x > 0, \quad n \geq 1.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbf{R}$.

2. (a) Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,+\infty[} f_n(x)\,\lambda(dx).$$

(b) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,+\infty[} f_n(x)\,\lambda(dx) = +\infty.$$

Tournez S.V.P.

Exercice 4. On considère les fonctions F, G et H définies sur $\mathbf{R}_+$ suivantes :

$$\forall t \geq 0, \qquad F(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\, dx, \qquad G(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2}\, dx\right)^2, \qquad H(t) = F(t) + G(t).$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$.
2. Justifier rapidement que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ puis montrer que

$$\forall t \geq 0, \qquad H'(t) = 0.$$

3. (a) Préciser la valeur de $H(0)$ puis déterminer $\lim_{t\to+\infty} F(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} G(t)$.
   (b) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

4. Soit A une matrice inversible de taille $d \times d$ à coefficients réels. Calculer

$$\int_{\mathbf{R}^d} e^{-\|Ax\|^2}\, \lambda_d(dx),$$

où $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de $x \in \mathbf{R}^d$ et λ_d la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^d$.

Exercice 5. L'objectif de l'exercice est de montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\, \lambda(dx) = \pi\, e^{-|t|}.$$

1. Montrer que, pour tous $a > 0$ et $t \in \mathbf{R}$,

$$\int_{\mathbf{R}} e^{itx} e^{-a|x|}\, \lambda(dx) = \frac{2a}{a^2+t^2}.$$

2. Soient $a > 0$ et $t \in \mathbf{R}$ fixés. On considère la fonction f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$f(x,y) = e^{i(y+t)x} e^{-a|x|} e^{-|y|}.$$

En utilisant le théorème de Fubini, montrer que

$$\int_{\mathbf{R}} e^{itx} e^{-a|x|} \frac{2}{1+x^2}\, \lambda(dx) = \int_{\mathbf{R}} e^{-|y|} \frac{2a}{a^2+(y+t)^2}\, \lambda(dy).$$

3. (a) Montrer que, pour tous $a > 0$ et $t \in \mathbf{R}$,

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-|y|} \frac{2a}{a^2+(y+t)^2}\, \lambda(dy) = \int_{\mathbf{R}} \frac{2}{1+z^2} e^{-|az-t|}\, \lambda(dz).$$

   (b) Conclure à l'aide du théorème de convergence dominée lorsque $a \to 0^+$.

Fin de l'épreuve